

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО**

**ОМСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО
ГЕОМЕТРИИ
И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯМ**

(Омск, 13–16 октября 2025 г.)

© ФГАОУ ВО «ОмГУ им. Ф.М. Достоевского», 2025

ISBN 978-5-7779-2751-4

Омск
Издательство
Омского государственного
университета им. Ф.М. Достоевского
2025

УДК 004+519
ББК 22.18я43+32.973я43
О-340

Рецензенты:

канд. физ.-мат. наук, доцент И.П. Бесценный,
канд. физ.-мат. наук, доцент Н.Ф. Богаченко

Ответственный за выпуск

доктор. физ.-мат. наук, профессор А.К. Гуц

О-340 Омская конференция по геометрии и её приложениям (Омск,
13 – 16 октября 2025 г.) / отв. за вып. А. К. Гуц. –
Омск : Издательство Омского государственного университета
им. Ф.М. Достоевского, 2025. – 1 CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-7779-2751-4

В настоящий сборник включены тезисы докладов, присланные на «Омскую конференцию по геометрии и её приложениям». Она состоялась в Омском научном центре 13–16 октября 2025 г. Для магистрантов, аспирантов и научных работников.

УДК 004+519
ББК 22.18я43+32.973я43

Текстовое электронное издание
Самостоятельное электронное издание

Минимальные системные требования:

процессор с частотой 1,3 ГГц и выше; ОЗУ 512 Мб; Microsoft Windows
XP/Vista/7/8/10 и выше; Adobe Acrobat Reader 8.0 и выше; CD-ROM; мышь

ISBN 978-5-7779-2751-4

© ФГАОУ ВО «ОмГУ
им. Ф.М. Достоевского», 2025

*Издаётся в авторской редакции
в соответствии с оригиналом,
предоставленным организационным комитетом конференции*

Дата выпуска: 30.09.2025.
1 электрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см.
Тираж 8 копий. Объём 35 Mb.

Издательство
Омского государственного университета им. Ф.М. Достоевского
644077, г. Омск, пр. Мира, 55а
тел.: 8 (3812) 22-25-71, 22-25-61, 64-13-07

Международная научная конференция «**Омская конференция по геометрии и её приложениям**». – Омск : Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, 2025. – 165 с.

Программный комитет

- | | |
|---------------------------|---|
| В. А. Александров | сопредседатель , доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института математики СО РАН им. С. Л. Соболева, г. Новосибирск |
| А. К. Гуц | сопредседатель , доктор физ.-мат. наук, профессор Сочинского государственного университета, г. Сочи |
| В. Н. Берестовский | доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института математики СО РАН им. С. Л. Соболева, г. Новосибирск |
| А. Д. Медных | доктор. физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института математики СО РАН им. С. Л. Соболева, г. Новосибирск |
| И. А. Зубарева | канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Омского филиала Института математики СО РАН им. С. Л. Соболева, г. Омск |

Организационный комитет

- | | |
|--------------------------|--|
| В. А. Александров | сопредседатель , доктор физ.-мат. наук, Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева, г. Новосибирск |
| А. К. Гуц | сопредседатель , доктор физ.-мат. наук, профессор, заслуженный профессор Омского государственного университета им. Ф. М. Достоевского, Сочинский государственный университет, г. Сочи |
| А. В. Еремеев | доктор. физ.-мат. наук, и.о. директора Омского филиала Института математики СО РАН им. С. Л. Соболева, г. Омск |
| Н. Ф. Богаченко | канд. физ.-мат. наук, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, г. Омск |
| А. В. Трейер | канд. физ.-мат. наук, заместитель и.о. директора Омского филиала Института математики СО РАН им. С. Л. Соболева, г. Омск |
| И. А. Зубарева | канд. физ.-мат. наук, Омский филиал Института математики СО РАН им. С. Л. Соболева, г. Омск |
| Э. Ю. Даниярова | канд. физ.-мат. наук, Омский филиал Института математики СО РАН им. С. Л. Соболева, г. Омск |
| А. Л. Евтягин | Омский филиал Института математики СО РАН им. С. Л. Соболева, г. Омск |
| И. М. Бучинский | Омский филиал Института математики СО РАН им. С. Л. Соболева, г. Омск |

Организаторы конференции

Математический центр в Академгородке
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского

Конференция проводится при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2025-349.

The Conference is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under the agreement No. 075-15-2025-349 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЦЕНТР В АКАДЕМГОРОДКЕ



**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Омский государственный университет имени Ф.М. Достоевского приглашает математиков стать авторами университетского журнала «Математические структуры и моделирование».

Журнал ОмГУ основан в 1998 году. В журнале публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по математике, теоретической физике, компьютерным наукам, философии и истории математики и информатики.

Все статьи журнала проходят обязательное рецензирование. Рефераты статей журнала опубликованы в «Реферативном журнале», «Mathematical Reviews» (США), «Zentralblatt für Mathematik» (Германия) и в РИНЦ (elibrary.ru). Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, входящих в Международные реферативные базы данных (МРБД) и системы цитирования (Список от 31.12.2023, № 769), в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней (Приказ Минобрнауки России от 25.07.2014 № 793). Имеет категорию K1.

Все статьи в журнале публикуются под лицензией Attribution 4.0 International (CC-BY).

Электронная версия журнала представлена в сети:

<http://msm.omsu.ru>

<http://msm.univer.omsk.su>

Электронная почта главного редактора:

aguts@mail.ru

Электронная почта выпускающего редактора:

dmtrl@ya.ru

СОДЕРЖАНИЕ

А.К. Гуц. *Геометрические научные школы России* ... 9

Риманова геометрия

Н.А. Абиев. *Улучшенные оценки поведения нормализованного потока Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха* 16

В.Н. Берестовский, А. Мустафа. *Радиус инъективности эллипсоида вращения* 20

В.Н. Берестовский, И.А. Зубарева. *О сублоренцевых экстремальных на $GL^+(2, \mathbb{C})$ с порождающим пространством эрмитовых матриц в алгебре $Li\mathfrak{gl}^+(2, \mathbb{C})$* 24

А.Ю. Веснин, А.А. Егоров. *Гипотеза об объеме и детерминанте для альтернированных гиперболических узлов* 28

М.Е. Гнедко, О.П. Хромова. *Конформное уравнение Киллинга на 2-симметрическом шестимерном неразложимом лоренцевом многообразии с тривиальным тензором Вейля* 31

Д.С. Григорьев, Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов. *Поток Риччи на трехмерных унимодулярных Группы Ли с лоренцевой метрикой и связностью Леви-Чивиты* 33

А.К. Гуц. *Изменения геометрии и топологии лоренцевых многообразий, потоки Риччи с хирургией и модальная логика S^4* 36

Ю.Д. Ефременко. *О классе Лосика-Черна одного семейства слоений коразмерности 2* 39

В.А. Кыров. *Группы Гельмгольца типа* 41

А.А. Магазев, И.В. Широков. *Левинвариантные псевдоримановы структуры со скрытой симметрий и интегрируемость их геодезических потоков* .. 44

К.В. Полякова. *Аналог симметрической плоской связности с нетензором кручения и нетензором кривизны* 47

М.Н. Подоксёнов, Н.С. Герасимович. *Самоподобное лоренцево многообразие одной специальной трёхмерной группы Ли* 50

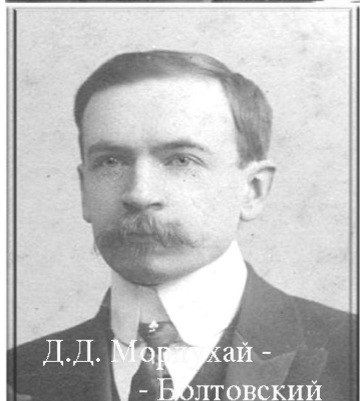
Геометрия пространств и поверхностей

Я.Н. Алиев. *Каустики параболоида и задача Аполлония* 54

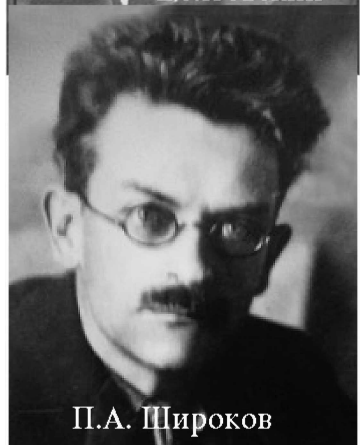
Российские геометры



А.Д. Александров



Д.Д. Морозов -
Болтовский



П.А. Широков



- Н.Я. Алиев, Ф.Н. Алиев. *О некоторых случаях отображений поверхностей евклидовых пространств* 57
- М.Б. Банару, Г.А. Банару. *О почти контактной метрической структуре на гиперповерхности 6-мерной сферы* 59
- О.О. Белова. *Объект неабсолютных перенесений для коконгруэнции* 62
- И.И. Бодренко. *О внешней геометрии R-поверхностей в евклидовых пространствах* 65
- В.В. Варламов. *Геометрия спинора и лист Мёбиуса* 68
- В.В. Казак. *Смешанная краевая задача в теории бесконечно малых изгибаний* 71
- Д.С. Климентов. *О гладкости нормали поверхности положительной кривизны класса C^1* 73
- А.В. Костин. *Преобразования Лагерра, теоремы типа Кейси и поверхности постоянной кривизны* .. 75
- А.В. Костин, Н.Н. Костина. *О контактных числах в гиперболической геометрии* 78
- А.Д. Медных. *Теория узлов с точки зрения теории графов и римановых поверхностей* 79
- И.А. Медных. *Спектральные инварианты циклических накрытий графов* 80
- И.Х. Сабитов. *К гипотезе Эйлера о неизгибаемости компактной поверхности* 82

Приложения геометрии и всё такое

- Н.Ф. Богаченко. *Алгоритм решения задачи Штейнера* 85
- В.В. Варламов. *О геометрической структуре периодической системы элементов* 88
- А.В. Грешнов. *Оптимальные значения констант в (q_1, q_2) -обобщенном неравенстве треугольника для Вох-квазиметрик групп Карно* 91
- А.К. Гуц. *Гравитационное отталкивание и геометрия 3-мерных кротовых нор, соединяющих тяготеющие тела* 94
- М.Б. Карманова. *О цепочках отображений на группах Карно* 96

Продолжение на следующей странице

Российские геометры



Д.М. Синцов



К.М. Петерсон



В.Ф. Каган



Е. Ю. Деревцов, С. В. Мальцева. *Об одной модели послойного решения задачи интегральной геометрии в полупространстве* 98

М.Д. Ковалёв. *Геометрические вопросы теории шарнирных устройств* 102

О. Kosheleva, V. Kreinovich. *Space-time perception: why evolution has led to logarithmic (and power law) subjective time and why we cannot remember early childhood* 105

О. Kosheleva, V. Kreinovich. *Because of space-time symmetries, acceptable micro-acausality inevitably leads to the possibility of macro-scale causality violations* 109

A.V. Levichev. *On the space of chronometric proton's wave functions: scaling-based detection of its new elements* 113

С.В. Мальцева, Е.Ю. Деревцов. *О послойном решении задачи интегральной геометрии в цилиндре* 115

А. П. Полякова, И. Е. Светов. *О лучевых преобразованиях моментов, действующих на двумерные тензорные поля* 118

И. Е. Светов, А. П. Полякова. *Весовые преобразования Радона трехмерных симметричных 2-тензорных полей* 121

М.С. Сгибнев. *Об уравнении Вольтерра первого рода* 124

К.В. Сторожук, В.А. Шарафутдинов. *Один численный подход к двумерной задаче Кальдерона* 127

Д.С. Климентов, Е.В. Тюриков. *Математическая модель состояния равновесия для одного класса выпуклых оболочек со смешанными статическими условиями* 130

В.А. Шарафутдинов. *Геометрия идеальной жидкости* 133

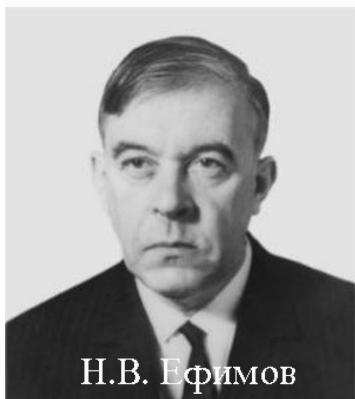
Выпуклая геометрия

В.А. Александров, Е.П. Волокитин. *Изгибаемый многогранник Штеффена является вложенным. Доказательство* 136

А.Л. Вернер, Л.А. Антипова. *Изучение звёздчатых многогранников Г. Коксетера методами А.Д. Александрова* 139

Продолжение на следующей странице

Российские геометры



Н.В. Ефимов



В.В. Вагнер



А.В. Погорелов



Е.В. Никитенко, Ю.Г. Никоноров. *Свойство плоских углов тетраэдров с заданным основанием* 142

В.А. Новицкая, Л.А. Антипова. *Использование ориентированной площади многоугольника в вычислении обобщенного объема геометрического многогранника с самопересечениями* 145

И.Ф. Майник. *Правильные многоугольники* 148

И.В. Поликанова, М.В. Куркина. *Соотношения между выпуклыми оболочками множества, его границы и его замыкания* 151

В.И. Субботин. *О существовании и перечислении RR -многогранников* 153

А.В. Тимофеев. *От правильногранных тел к паркетогранникам: моделирование для доказательства полноты их списка и приложений* 156

Универсальная алгебраическая геометрия

М. Rasskazova. *Finite geometries and corresponding quasigroups* 159

А.В. Трейер, И.А. Чесноков. *Центроид метабелевых групп Баумслага-Солитера* 163

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НАУЧНЫЕ ШКОЛЫ РОССИИ

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: aguts@mail.ru, SPIN-код: 3792-6510

Сочинский государственный университет, Сочи, Россия

Аннотация. В статье представлены российские геометрические научные школы. История их появления, создатели школы, частично тематика научных исследований, участники и воспитанники.

Ключевые слова: геометрическая научная школа, создатели школы, тематика исследований.

Под научными школами, как правило, понимается коллектив специалистов в той или иной сфере научных исследований, объединившихся вокруг человека, предложившего тему и методы исследований, обладающего определенной харизмой, благодаря которой к нему тянутся, ходят на его семинары, решают предложенные им задачи, естественным образом включающие и предложенные руководителем методы и приемы исследований.

В данной статье мы рассматриваем геометрические школы, тематика которых связана с наукой геометрией, и имевшие или имеющие место на территории бывшей Российской империи, безотносительно к их современной государственной принадлежности. Отчасти такой подход оправдан тем, что фактически начало геометрии как науки в Российской империи следует отсчитывать от Николая Лобачевского, доклад которого в **1826** году является ярким заявлением появления в России самостоятельной оригинальной и идейно сильной геометрии.

Лобачевский породил в Российской империи Казанскую геометрическую школу, хотя как социальный институт она проявилась гораздо позже благодаря стараниям А.В. Васильева.

На данный момент мы можем говорить о том, что на территории Российской империи существовали/существуют следующие геометрические школы: Харьковская (1921, ХГУ), Ростовская (1926, РГУ), московские (1933, МГУ и 1930, МГПИ им. В.И. Ленина), Ленинградская (1933, ЛГУ и РГПИ им. А.И. Герцена), Казанская (1934, КГУ), Саратовская (1935, СГУ), Белорусская (1935, БГУ), Иркутская (1938, ИГУ), Томская (1945, ТГУ), Одесская (1963, ОГУ), Ярославская (1964, ЯГПИ), Калининградская (1967, КГУ), Пензенская (1971, ПГПИ).

Эти школы воспитали геометров, которые развивали геометрию в Казахстане, Узбекистане, Молдавии и в других бывших советских республиках, которая была тесно связана с теми школами, в которых упомянутые геометры вошли в геометрическую науку и, в общем-то, унаследовали их тематики.

Харьковская геометрическая школа. Основателем харьковской геометрической школы стал Д.М. Синцов (1867–1946) – **воспитанник Казанского университета**, на которого большое влияние оказал А.В. Васильев. Он появился в Харькова

в 1903 году. Д.М. Синцов организовал семинар по дифференциальной геометрии и привлёк к научным исследованиям в области геометрии многочисленную группу своих учеников, открыв в 1921 году кафедру геометрии в Харьковском университете [1].

Члены кафедры/школы в разные годы: Ю.А. Аминов (ученик Н.В. Ефимова), И.В. Андрусь, Г. Е. Березняк, Я.П. Бланк, А.А. Борисенко (зав.кафедрой с 1980 года), И.В. Бовдуй, Д.В. Болотов, А.С. Вайнфельд, Д.И. Власенко, В.А. Горькавый, Д.З. Гордиевский, В.П. Горох, О.А. Гончарова, П.М. Дармостук, В.Н. Денисов, П.Г. Доля, Н.М. Душин, Т.И. Котов, В.В. Круглов, Г.Ч. Куринной, А.С. Лейбин, О.В. Лейбина, В.Т. Лисица, О.В. Лыкова, Л.А. Масальцев, А.Д. Милка, А.И. Медяник, Ю. Найшулер, Мария А. Николаенко, Ю.А. Николаевский, Е.А. Олин, В. Попов, Е.В. Петров, Д. Петров, М. Прошин, Е.П. Сенькин (ученик А.Д. Александрова), В.М. Савельев, П.О. Соловьев, Ф.С. Рябоконь, С.М. Урисман, Н.К. Фарафонова, М.А. Якуба, А.Л. Ямпольский, И.С. Чернушенко и др. [1].

С 1950 года по 1960 год заведующим кафедрой геометрии ХГУ был выдающийся геометр А.В. Погорелов (премия им. Н.И. Лобачевского) – ученик А.Д. Александрова. С 1960 года по 2000 год он заведовал отделом геометрии Физико-технического института низких температур АН УССР.

Ростовская геометрическая школа. Формирование ростовской геометрической школы, можно считать, началось в 1926 году. В Казани широко праздновалось 100-летие со дня знаменитого выступления Н.И. Лобачевского [2]. Основателем стал Д.Д. Мордухай-Болтовский (1876–1952), руководивший геометрическим кабинетом (кафедрой).

Первое поколение ростовских геометров – это М.П. Черняев, Н.М. Несторович, К.К. Мокрищев, П.Г. Колобов, В.Т. Фоменко, Б.А. Бублик, С.В. Дейнеко. В середине 1960-х ростовские геометры пререшли к изучению вопросов геометрии поверхности в целом – направление, которое поддерживалось Н.В. Ефимовым – выпускником РГУ и А.Д. Александровым.

Кафедру геометрии, которая возникла в 1931 году, возглавляли: проф. М.П. Черняев (1931 – 1940), проф. А.М. Несторович (1946–1954), проф. К.К. Мокрищев (1955–1981), доц. П.Г. Колобов (1981–1983), доц. В.В. Казак (1983–1988), проф. С.Б. Климентов (1988–...).

На кафедре в разное время работали и работают: проф. С.Б. Климентов, П.Е. Марков, Д.С. Климентов, В.В. Казак, Л.М. Клёнова, Н.Г. Перлова, И.А. Чернявская.

Московские геометрические школы. Кафедра геометрии в МГПИ была образована в 1930 году. На ней работали: С.П. Фиников, В.Ф. Каган, Я.С. Дубнов, Н.Ф. Четверухин, И.М. Яглом, М.А. Акивис, В.Т. Базылев, Л.С. Атанасян, Б.А. Пасынков, А.В. Архангельский, С.Л. Атанасян, Н.С. Денисова и другие. Для руководства аспирантами кафедра привлекала профессоров П.К. Рашевского, А.М. Васильева, Б.А. Розенфельда, Н.М. Остиану, Л.Е. Евтушика.

Создателем Московской геометрической школы сформировавшейся на базе Московского университета и Московского математического общества следует считать К.М. Петерсона [3, с. 101]. Кафедра дифференциальной геометрии МГУ была

основана в **1933** году В.Ф. Каганом, приехавшим из Одессы в 1922 году. Кафедрой заведовали: С.П. Фиников (1952–1964), П.К. Рашевский (1964–1983); и с 1992 года по настоящее время – А.Т. Фоменко. На кафедре работают/работали: А.И. Шафаревич, А.А. Тужидин, Г.В. Носовский, А.О. Иванов, С.П. Новиков, А.М. Васильев, А.С. Мищенко, А.Н. Варченко, Л.Е. Евтушик, Н.Н. Яненко и другие.

Московская геометрия столь обширна, что о ней надо писать отдельно. Перечислим наиболее известных московских геометров: Д.Ф. Егоров, В.Ф. Каган, П.К. Рашевский, Н.В. Ефимов (премия им. Н.И. Лобачевского), Л.С. Понтрягин (премия им. Н.И. Лобачевского), С.П. Фиников, Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев, Б.А. Розенфельд, А.П. Норден (медаль им. Н.И. Лобачевского), П.С. Александров (премия им. Н.И. Лобачевского), А.Н. Колмогоров (премия им. Н.И. Лобачевского), В.И. Арнольд (премия им. Н.И. Лобачевского), С.П. Новиков (премия им. Н.И. Лобачевского), И.Х. Сабитов (медаль им. Н.И. Лобачевского) и другие.

Ленинградская геометрическая школа. Кафедра высшей геометрии была создана в Ленинградском университете в **1933** году. Формирование тематики исследований кафедры связано с А.Д. Александровым (геометр, 1930-е – 1960-е) и В.А. Рохлиным (тополог, 1960-е – 1980-е)

Создателем Ленинградской геометрической школы является великий геометр XX века акад. А.Д. Александров (премия им. Н.И. Лобачевского) – ученик алгебраиста/геометра Б.Н. Делоне (премия им. Н.И. Лобачевского) и физика В.А. Фока (премия им. Н.И. Лобачевского). Школа базировалась в ЛГУ, ЛОМИ, РГПИ им. А.И. Герцена, в Новосибирском университете, в ИМе им. С.Л. Соболева СО АН СССР). Начала оформляться в конце 1930-х, затем мощно заявила о себе после Великой Отечественной войны, расширилась территориально до Западной Сибири (НГУ, ИМ СО СССР). В НГУ начал действовать семинар кафедры геометрии и топологии, заведующим которой стал А.Д. Александров, переехавший в 1964 году в Сибирь. Состав кафедры этого периода описан в статье [5].

После возвращения А.Д. Александрова в 1986 году в Ленинград он стал профессором кафедры геометрии в РГГУ и сотрудником ЛОМИ АН СССР, где продолжались исследования по тематике его школы (В.А. Залгаллер, Ю.Д. Бугаго, Г.Я. Перельман, проф. А.Л. Вернер). Более подробно об исследованиях А.Д. Александрова и о составе школы можно посмотреть в статье [6].

Казанская геометрическая школа. Геометрические исследования в Казани были начаты Н.И. Лобачевским. Однако кафедра геометрии в Казанском университете была образована в **1934** году, позже, чем в Харькове. Но геометрические исследования в Казани в разные годы вели: Ф.М. Суворов, А.П. Котельников, Д.М. Синцов, Н.Н. Парфентьев. Последний в 1926 году организовал работу геометрического семинара.

Становление Казанской геометрической научной школы тем не менее связана с именем П.А. Широкова – ученика Н.Н. Парфентьева.

Ученики П.А. Широкова: Б.Л. Лаптев, И.П. Егоров, А.З. Петров, П.И. Петров, Г.С. Бархин, В.Г. Копп, А.П. Заборская.

После смерти П.А. Широкова в 1945 году заведующим кафедры геометрии был приглашен новосибиржец А.П. Норден (медаль им. Н.И. Лобачевского) – пред-

ставитель **московской геометрической школы**. Норден распространил тензорную дифференциальную геометрию на проективно-дифференциальную и конформно-дифференциальную геометрии¹.

В данное время на кафедре работают: А.А. Попов (зав. кафедрой), В.В. Шурыгин, В.В. Шурыгин (мл.), Д.Р. Хакимов, С.К. Зубкова.

Развитие геометрии в Казанском университете породило в 1960 году кафедру теории относительности и гравитации. Ее создал А.З. Петров со своими учениками – В.Р. Кайгородовым, А.В. Абдуллиным, А.М. Анчиковым, А.В. Аминовой, В.И. Голиковым, Р.Ф. Биляловым и другими. Геометры, в определенной мере, превратились в физиков. Казань еще раз удивила геометрический мир, а типы Петрова, с помощью которых классифицировали тензор Римана и поля гравитации, разлетелись по всему миру, описывая, в частности, гравитационные волны.

В 1997 году Б.П. Комраков, работающий с 1996 году в Казани, был награжден медалью им.Н.И. Лобачевского.

Саратовская геометрическая школа. Кафедра геометрии Саратовского университета была создана осенью **1935** года профессором В.В. Вагнером (1908–1981, премия имени Н.И. Лобачевского) – учеником В.Ф. Кагана.

Со временем на кафедре, и в разные годы, стали работать: А.Л. Правдолюбов, А.Е. Либер, Ю.Е. Пензов, Н.Ф. Ржехина, Ю.И. Ермаков, Н.И. Кабанов, М.А. Спивак, А.В. Гохман, М.В. Лосик, Л.Н. Либих, В.В. Розен, О.В. Шимельфениг, А.В. Ершов, В.И. Игошин, В.Б. Поплавский, Л. Н. Ромакина, В.Т. Чельшев, И.Г. Брагина, Н.С. Егорова, И.П. Иванченко, С.И. Ишина, Н.В. Сергеева, Ю.В. Шевцова².

Основные направления научной работы кафедры за последние годы: алгебра и геометрия интегрируемых систем; структуры на гладких многообразиях; неевклидовы геометрии.

Белорусская геометрическая школа. Кафедра геометрии открыта в Белорусском государственном университете (БГУ) в **1935** году.

В 1969 году профессор В. И. Ведерников (1919–1991) – ученик А.П. Нордена (КГУ) принял приглашение Белорусского государственного университета возглавить кафедру геометрии. Под его руководством защищены 8 кандидатских диссертаций.

А.С. Феденко – зав. кафедрой с 1984 по 1993 год – выпускник МГУ. В БГУ до 1998 года работал Б.П. Комраков – воспитанник БГУ (медаль имени Н.И. Лобачевского в 1997 году).

В настоящее время на кафедре геометрии, топологии и методики преподавания математики работают: Д.Ф. Базылев (зав. кафедрой), В.В. Балащенко, Д.В. Вылегжанин, В.В. Суворов, В.Л. Тимохович, Г.О. Кукрак и др.

Тематика исследований: геометрия и арифметика алгебраических многообразий; однородные пространства групп Ли и инвариантные структуры на них; геометрия дифференцируемых многообразий со слоениями; топологические структуры и конструкции.

¹ Сайт: <https://biography.wikireading.ru/246138>

² Сайт кафедры геометрии СГУ <https://www.sgu.ru/struktura/mechmath/kafgeom>

Иркутская геометрическая школа. Кафедра геометрии была образована в 1938 году. Заведующим кафедрой был назначен И.Н. Рукавицын – *выпускник Императорского Казанского университета*, известный своими исследованиями в геометрии связок сфер.

На кафедре работали: Ю.Ф. Харкеевич, Л.Я. Ланина, В.Д. Пластинина, В.И. Машанов, Т.Ф. Перевертаева, П.Я. Грушко, Е. Ю. Кузьмина, Л.А. Осипенко, Н.М. Кузуб, В.В. Блудов, М.И. Верховина, З.Г. Григорьева, В.В. Дудкин, М.П. Дук, Д.В. Зарапина, М.А. Иванова, М.Н. Кирилук, В.Ф. Клейменов, Э.М. Кондакова, А.Н. Лебедева, А.Д. Лобанова, Л.В. Логвинович, А.К. Мартынов, Г.Н. Нежинская, Г.В. Нестеренко, Л.В. Нечаева, Ю.Г. Пензин, Е.П. Романова, Е.Е. Скурихин, И.Н. Снятиновская, В.А. Труппова [11].

Проводились исследования по дифференциальной геометрии обобщенных пространств с фундаментальной группой, теории групп и алгебр Ли, геометрии и топологии однородных пространств.

Томская геометрическая школа. Кафедра геометрии ТГУ была создана Н.Г. Тугановым в ноябре 1945 года. Однако основателем Томской геометрической школы считается проф. Н.Р. Щербаков – ученик Н.Г. Туганова. Основные результаты научных работ Н.Р. Щербакова относятся к линейчатой геометрии евклидова, аффинного и проективного пространства [10].

Преподаватели кафедры – ученики Н.Р. Щербакова: М.Б. Пергаменщиков, Е.Т. Ивлев, Н.М. Онищук, Л.И. Магазинников, В.В. Слухаев, В.П. Долговых, Л.З. Кругляков, В.И. Слободской и др. Воспитанники школы: В.С. Малаховский, Б.Н. Сушников, В.В. Кайзер, Н.К. Смоленцев, А.Ф. Соловьев.

Отметим, что новосибирские геометры В.А. Топоногов, В.К. Ионин, С.З. Крушаль переехали в Новосибирск из Томска, их становление следует отнести к томской геометрической школе.

В настоящее время на кафедре геометрии работают: М.С. Бухтяк (зав.кафедрой), Т.А. Козловская, Е.Е. Корякина, А.В. Никольский, С.А. Пономарев, В.А. Чуриков, Вьонг Хью Бао.

Одесская геометрическая школа. В течение многих лет работал в Одессе В.Ф. Каган. Там он в 1900 г. выпустил учебник по геометрии Лобачевского, а в 1905-1907 гг. – двухтомную монографию «Основания геометрии».

В 1963 году Н.С. Синюков, приехавший в 1955 году на работу в Одесский университет после окончания аспирантуры в МГУ, возглавил созданную кафедру геометрии и топологии³. Его руководителями были П.К. Рашевский и с 1953 года – Н.Н. Яненко. Под руководством Н.С. Синюкова выполнили и защитили кандидатские диссертации 14 его аспирантов. Его усилиями в Одесском государственном университете сложилась геометрическая научная школа, разрабатывающая теорию диффеоморфизмов обобщенных пространств⁴.

Первый состав кафедры: Н.С. Синюков, В.А. Алексеев, М.Л. Гаврильченко, П.Ф. Долибандо, К.А. Норкин, Л.Л. Безкоровайнова.

³Сайт URL: <http://d-omega.org/category/ann/>

⁴Сайт <https://penzanews.ru/region/encyclopedia/9956-2009>

Заведующие кафедрой: Н.С. Синюков (1963–1988), С.Г. Лейко (1988–2010), С.М. Покась (2010–2017).

Ярославская геометрическая школа. Отдельная кафедра геометрии Ярославского государственного педагогического института (ЯГПИ) была воссоздана в 1964 году. Заведующий З.А. Скопец. Был открыт Совет по защите кандидатских диссертаций по специальности «Геометрия и топология». На базе ЯГПИ прошли четыре Всесоюзных Школ-семинаров по алгебраической геометрии (1979, 1980, 1982 и 1984). В школах участвовали многие известные геометры [13].

Среди членов кафедры были представители трех направлений в геометрии: тензорной и дифференциальной геометрии (руководитель – профессор А.М. Лопшиц), конструктивной и алгебраической геометрии (руководитель – профессор З.А. Скопец) и геометрии внешних форм (руководитель – Г.Б. Хасин – ученик С.П. Финикова) [12].

А.М. Лопшиц, принадлежащий к одесской геометрической школе В.Ф. Кагана, на кафедре алгебры и геометрии появился в 1949 году, а с 1964 года он профессор кафедры геометрии.

В 2009 году на кафедре работали: профессора А.С. Тихомиров, В.В. Афанасьев и А.В. Ястребов, доценты В.М. Ермакова и С.В. Жаров и старшие преподаватели Т.Л. Рыбакова и Р.З. Гушель.

Как известно, благодаря А.Н. Колмогорову, под редакцией и при участии З.А. Скопца был издан учебник «Геометрия 9-10», по которому с 1975 по 1986 годы работали все школы СССР. Учебник подвергался критике и его заменили учебники Л.С. Атанасяна и А.В. Погорелова.

Геометрические исследования на кафедре в разное время развивались Т.Л. Агафоновой, С.А. Тихомировым, Н.В. Тимофеевой, М.А. Заводчиковым [12].

Калининградская геометрическая школа. Осенью 1967 года томский профессор В.С. Малаховский был избран по конкурсу заведующим кафедрой высшей алгебры и геометрии вновь образованного Калининградского университета. Вскоре он открывает аспирантуру и начинает издание ежегодного межвузовского научного сборника «Дифференциальная геометрия многообразий фигур», существующего как журнал в наше время [7].

Всего профессором В.С. Малаховским подготовлено 17 кандидатов наук, что стало основой Калининградской геометрической школы. Тематика исследований отчасти унаследована от Томской геометрической школы, но основным стало построение дифференциальной геометрии многообразий, образующим элементом которых является фигура, отличная от точки исходного пространства.

Сегодня в Калининграде (БФУ) работают геометры Ю.И. Шевченко (зав. кафедрой с 2007 до 20..), О.О. Белова, К.В. Полякова, А.В. Вялова, А.В. Кулешов, К.В. Башашина, Н.А. Рязанов, К.К. Хабазня, М.В. Кретов и др. Многие из них защищали свои диссертации в Казани или в МГПУ.

Пензенская геометрическая школа. Пензенская геометрическая школа зародилась в Пензенском государственном педагогическом институте (ПГПИ). О ней как-то мало пишут, и это деятельность выдающегося геометра И.П. Егорова (1915–1990) – воспитаника Казанского университета, ученика П.А. Широкова.

Публикации И.П. Егорова посвящены группам движений в пространствах аффинной связности, лакунарным распределениям порядков групп автоморфизмов этих пространств, геометрии пространств соответствующей лакунарности и строению самих групп [9]. С 1950 года И.П. Егоров руководил геометрическим семинаром, подготовил более 15 кандидатов и докторов наук. Слушатели семинара были Н.С. Синюков и Д.В. Веденяпин.

Отдельная кафедра геометрии в ПГПИ появилась только в декабре **1971** года⁵. На кафедре геометрии в настоящее время работают: проф. В.И. Паньженский (зав. кафедрой), Л.С. Горшкова, О.П. Сурина, О.Г. Шакирзянова, М.В. Сорокина, О.В. Сухова и другие.

Литература

1. Борисенко А.А. Кафедре геометрии Харьковского университета 90 лет. <https://URL:www.researchgate.net/publication/266202434>
2. Налбандян Ю.С. Ростовская геометрическая школа. URL: <https://mmcs.sfedu.ru/jdownload/finish/22-kafedra-matematicheskogo-analiza-i-geometrii/2427-geometry>.
3. Математика, её содержание, методы и значение (в трёх томах). М.: АН СССР, 1956. Т. 2. – 397 с.
4. Норден А.П., Широков А.П. Наследие Н.И.Лобачевского и деятельность казанских геометров // Успехи математических наук. 1993. Т. 48, вып. 2(290). С.
5. Гуц А.К. Геометры и топологи Новосибирского университета в 1960-е годы // Математические структуры и моделирование. 2024. № 3(71). С. 106–125.
6. Гуц А.К. Александр Данилович Александров – великий геометр. К 110-летию со дня рождения // Математические структуры и моделирование, 2022. № 2 (62). С. 4–13.
7. Скрыдлова Е.В., Шевченко Ю.И. Владислав Степанович Малаховский и его геометрия // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 1999. Вып. 30. С. 6–13.
8. Белова О.О., Полякова К.В. Выдающийся геометр Юрий Иванович Шевченко (к 75-летию со дня рождения) // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2024. № 55 (2). С. 5–36.
9. Малаховский, В.С., Шевченко Ю.И., Егоров А.И., Родионов М.А., Садовников Н.В., Султанов А.Я. Выдающийся математик – Иван Петрович Егоров (К 100-летию со дня рождения) // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2015. № 46. С. 7-21/
10. Щербаков. URL: <http://math.tsu.ru/node/1953>.
11. Кузьмин О.В., Осипенко Л.А. К 85-летию со дня образования кафедры геометрии ИГУ // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2023. Т. 43. С. 122–136.
12. Афанасьев В.В., Соловьева А.А. Кафедра геометрии вчера и сегодня (к 45-летию кафедры) // Ярославский педагогический вестник. 2010. С. 112–118.
13. Жаров С.В., Медведева Л.Б., Третьякова Г.Ф. Ученый, учитель, творец (к 100-летию З.А. Скопца) // Ярославский педагогический вестник. 2017. №3. С. 364–367.
14. Секацкий В.В., Коршунова Н.И. 100-летию со дня рождения Абрама Мироновича Лопшица // Ярославский педагогический вестник. 1997. С. 105–106.

Дата поступления в оргкомитет: 16.08.2025

⁵Сайт кафедры. URL: <https://fmf-kafgeometry.narod.ru/prepod.htm>.

УЛУЧШЕННЫЕ ОЦЕНКИ ПОВЕДЕНИЯ НОРМАЛИЗОВАННОГО ПОТОКА РИЧЧИ НА ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ УОЛЛАХА

Н.А. Абиев

к.ф.-м. н., e-mail: abievn@mail.ru, SPIN-код: 9949-3719

Институт математики НАН Кыргызской Республики
Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация. Обсуждаются вопросы сохранения положительности кривизны Риччи римановых метрик на обобщенных пространствах Уоллаха под воздействием нормализованного потока Риччи. Получены некоторые улучшения прежних результатов, посвященных случаю совпадающих параметров. Приведены примеры с графическими иллюстрациями.

Ключевые слова: Обобщенные пространства Уоллаха, риманова метрика, нормализованный поток Риччи, кривизна Риччи.

Введение

В [4] было начато изучение эволюции инвариантных римановых метрик на обобщенных пространствах Уоллаха (ОПУ) под воздействием нормализованного потока Риччи (НПР)

$$\partial_t g(t) = -2 \operatorname{Ric}_g + 2n^{-1} g(t) S_g, \quad (1)$$

где Ric_g и S_g — соответственно тензор Риччи и скалярная кривизна римановой метрики g . Не вдаваясь в подробности, отметим, что каждое ОПУ описывается тройкой чисел $(a_1, a_2, a_3) \in (0, 1/2]^3$ (определения в [7]). Другой удобной чертой ОПУ является то, что в них любая инвариантная метрика g и её тензор Риччи Ric_g допускают разложения

$$g(\cdot, \cdot) = x_1 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_1} + x_2 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_2} + x_3 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_3}, \quad (2)$$

$$\operatorname{Ric}_g(\cdot, \cdot) = x_1 \mathbf{r}_1 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_1} + x_2 \mathbf{r}_2 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_2} + x_3 \mathbf{r}_3 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_3}, \quad (3)$$

где p_1, p_2 и p_3 — неприводимые модули в разложении представления изотропии (см. детали в [7]), x_1, x_2, x_3 — положительные числа и $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$ — компоненты тензора Риччи. Знание (2) и (3) позволяет свести (1) к следующей эквивалентной системе из трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно x_1, x_2, x_3 :

$$\frac{dx_i}{dt} = -2x_i \left(\mathbf{r}_i - \frac{a_1^{-1} \mathbf{r}_1 + a_2^{-1} \mathbf{r}_2 + a_3^{-1} \mathbf{r}_3}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1}} \right), \quad (4)$$

где $r_i = \frac{1}{2x_i} + \frac{a_i}{2} \left(\frac{x_i}{x_j x_k} - \frac{x_j}{x_k x_i} - \frac{x_k}{x_i x_j} \right)$ с $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ (см. [2]). Важным является вопрос о сохраняемости положительности кривизны Риччи под НПР. Подобный вопрос, в частности, изучен в работах [1, 4] для класса ОПУ с совпадающими параметрами $a_1 = a_2 = a_3 := a \in (0, 1/2)$, усиливая результаты [5, 6], посвященные случаям $a \in \{1/6, 1/8, 1/9\}$. В [2] получены обобщения результатов [4, теоремы 2–4] и [1, теорема 3] до случая ОПУ с произвольными параметрами $a_1, a_2, a_3 \in (0, 1/2)$. Основные результаты:

Теорема 1 ([2]). *НПР (1) не сохраняет положительности кривизны Риччи метрик (2) на каждом ОПУ с $a_1 + a_2 + a_3 \leq 1/2$.*

Теорема 2 ([2]). *Пусть $\theta = a_1 + a_2 + a_3 - \frac{1}{2}$ и $\theta_i = a_i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-2a_i}{1+2a_i}}$, $i = 1, 2, 3$. Тогда одно из следующих утверждений имеет место на каждом ОПУ с $a_1 + a_2 + a_3 > 1/2$:*

1. *НПР (1) сохраняет положительность кривизны Риччи всех метрик (2), если $\theta \geq \theta_i$ для каждого $i = 1, 2, 3$;*
2. *НПР (1) сохраняет положительность кривизны Риччи некоторых метрик (2) при нарушении хотя-бы одного из условий $\theta \geq \theta_i$.*

Теоремы 1 и 2 позволяют получить некоторые улучшения результатов теоремы 3 из [4].

Теорема 3 ([3]). *На ОПУ с $a_1 = a_2 = a_3 := a \in (0, 1/2)$ под воздействием НПР (1)*

1. *Все метрики (2) теряют $\text{Ric} > 0$, если $a \in (0, 1/6)$;*
2. *Некоторые метрики (2) сохраняют $\text{Ric} > 0$, если $a \in [1/6, a^*)$;*
3. *Все метрики (2) сохраняют $\text{Ric} > 0$, если $a \in [a^*, 1/2)$, где $a^* \in (1/6, 1/4)$ с точным значением $a^* = (\mu - 1)^2 (12\mu)^{-1}$, $\mu = \sqrt[3]{28 + 3\sqrt{87}}$. Приблизленно $a^* \approx 0.1739051924$.*

Случай $a = 1/6$ описан в теореме 4 из [4].

1. Примеры

Пример 1. *Случай $a \in (0, 1/6)$. Любая метрика (2) с $\text{Ric} > 0$ теряет $\text{Ric} > 0$ на каждом из пространств $\text{Sp}(3k)/\text{Sp}(k) \times \text{Sp}(k) \times \text{Sp}(k)$ под влиянием НПР (1), поскольку $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{k}{6k+2} < 1/6$, удовлетворяя теореме 3 при всех $k \in \mathbb{N}$.*

Пример 2. Другим примером, соответствующим случаю $a \in (0, 1/6)$, является пространство Уоллаха $W_{24} = F_4/\text{Spin}(8)$ с $a = 1/9$. В нем каждая метрика с $\text{Ric} > 0$ теряет $\text{Ric} > 0$ (левая панель на Рис. 1).

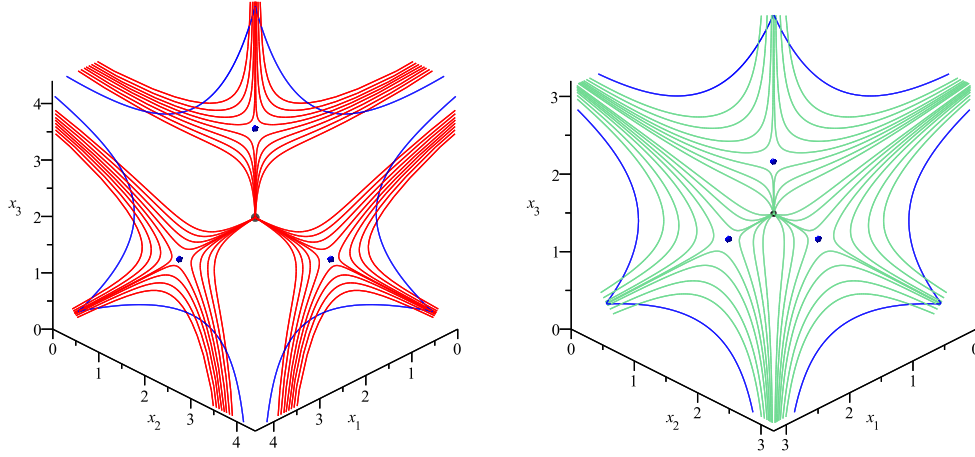


Рис. 1: При $a = 1/9$ траектории системы (4) покидают область положительности кривизны Риччи (левая панель); а при $a = 4/23$ — остаются в ней (правая панель).

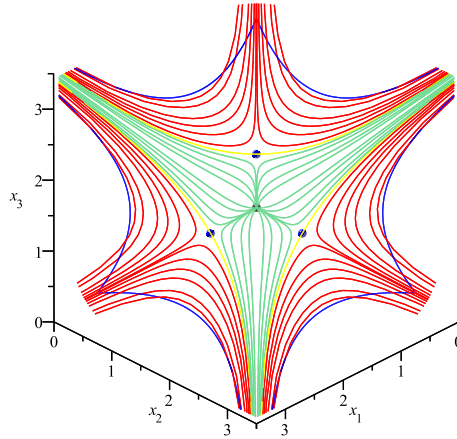


Рис. 2: При $a = 1/6$ существуют траектории системы (4), как покидающие область положительности кривизны Риччи, так и остающиеся в ней.

Пример 3. Случай $a = 4/23 \in [a^*, 1/2)$. Каждая метрика с $\text{Ric} > 0$ сохраняет $\text{Ric} > 0$ на каждом из пространств $\text{SO}(3k)/\text{SO}(k) \times \text{SO}(k) \times \text{SO}(k)$ с $k \in \{2, \dots, 16\}$ (правая панель на Рис. 1). Действительно, $1/6 < a \leq 1/4$ для всех $k \geq 2$ при $a = a_1 = a_2 = a_3 = k/(6k - 4)$. Допуская решения $k \leq \frac{4a^*}{6a^* - 1} \approx 16.0166$, неравенство $a \geq a^*$ может быть удовлетворено только при $k \in \{2, \dots, 16\}$. Значение $a = 4/23$ соответствует значению $k = 16$.

Пример 4. Случаю $a = 1/6$ соответствует счётное число ОПУ, к примеру, таковыми являются $\text{SU}(3k)/\text{S}(\text{U}(k) \times \text{U}(k) \times \text{U}(k))$. В каждом из них существуют

метрики, как сохраняющие $\text{Ric} > 0$, так и теряющие $\text{Ric} > 0$ (Рис. 2). Кривыми жёлтого цвета изображены параметры $x_i = x_j + x_k$ метрик Кэлера на инвариантной поверхности $x_1 x_2 x_3 = 1$.

Литература

1. Abiev N.A. On the evolution of invariant Riemannian metrics on one class of generalized Wallach spaces under the influence of the normalized Ricci flow // Siberian Adv. Math. 2017. V. 27, N. 4. P. 227–238. <https://doi.org/10.3103/S1055134417040010>
2. Abiev N. The Ricci curvature and the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces // Math. Phys. Anal. Geom. 2025. V. 28, N. 11. Paper 11. 35p. <https://doi.org/10.1007/s11040-025-09509-z>
3. Abiev N.A. Refined behavior description of the normalized Ricci flow on homogeneous spaces. Preprint ArXiv: <http://arxiv.org/abs/2508.07391>
4. Abiev N.A., Nikonorov Yu.G. The evolution of positively curved invariant Riemannian metrics on the Wallach spaces under the Ricci flow // Ann. Global Anal. Geom. 2016. V. 50, N. 1. P. 65–84. <https://doi.org/10.1007/s10455-016-9502-8>
5. Böhm C., Wilking B. Nonnegatively curved manifolds with finite fundamental groups admit metrics with positive Ricci curvature // GAFA Geom. Funct. Anal. 2007. V. 17, N. 3. P. 665–681. <https://doi.org/10.1007/s00039-007-0617-8>
6. Cheung M.-W., Wallach N.R. Ricci flow and curvature on the variety of flags on the two dimensional projective space over the complexes, quaternions and octonions // Proc. Amer. Math. Soc. 2015. V. 143, N. 1. P. 369–378. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2014-12241-6>
7. Nikonorov Yu.G. Classification of generalized Wallach spaces // Geom. Dedicata. 2016. V. 181, N. 1. P. 193–212. <https://doi.org/10.1007/s10711-015-0119-z>; correction: Geom. Dedicata. 2021. V. 214, N. 1. P. 849–851. <https://doi.org/10.1007/s10711-021-00604-3>

Дата поступления в оргкомитет: 03.09.2025

РАДИУС ИНЪЕКТИВНОСТИ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

В.Н. Берестовский¹

д.ф.-м. н., профессор, e-mail: vberestov@inbox.ru, SPIN-код: 6393-2941

А. Мустафа²

аспирант, e-mail: alimostafa19967777@gmail.com

¹Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет, Сирия

Аннотация. Радиус инъективности для сплюснутого эллипсоида вращения равен длине дуги экватора между ближайшими сопряженными значениями, а для вытянутого эллипсоида вращения — расстоянию вдоль меридиана между его сопряженными симметричными относительно полюса точками и меньше половины длины экватора.

Ключевые слова: геодезическая, кратчайшая, поле Якоби, радиус инъективности, сопряженные точки, экспоненциальное отображение, эллиптические интегралы, эллипсоид вращения..

Радиус инъективности i_p (соответственно, число σ_p) полного риманова многообразия M в его точке p определяется как точная верхняя граница чисел $r > 0$ таких, что экспоненциальное отображение Exp_p многообразия M в точке p (соответственно, его дифференциал $d(Exp_p)$) является диффеоморфизмом на открытом шаре $U(0, r)$ радиуса r с центром в нуле касательного евклидова пространства M_p к M в точке p (соответственно, не вырожден на $U(0, r)$).

Радиус инъективности $i(M)$ (соответственно, число σ) многообразия M есть точная нижняя граница чисел i_p (соответственно, σ_p) для всех $p \in M$.

В Следствии 4.14 из [1] доказано (формула Клингенберга), что радиус инъективности $i(M)$ компактного риманова многообразия M равен

$$i(M) = \min\{\sigma, l_0/2\}, \quad (1)$$

где l_0 — минимум длин нетривиальных геодезических петель на M .

Пусть M — эллипсоид вращения

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{a^2} = 1, \quad a > 0, \quad (2)$$

в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с индуцированной из $\mathbb{R}^3$ римановой метрикой. Эллипсоид (2) задается параметрическими уравнениями

$$(x, y, z) = (\cos u \cos \varphi, \cos u \sin \varphi, a \sin u), \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (3)$$

Здесь u — широта, φ — долгота или полярный угол.

В [2] установлено, что

$$K(r) = \frac{a^2}{(1 + (a^2 - 1)r^2)^2}, \quad (4)$$

$$a^2 = K(0) \leq K(r) \leq K(1) = \frac{1}{a^2}, \quad 0 < a < 1, \quad (5)$$

$$\frac{1}{a^2} = K(1) \leq K(r) \leq K(0) = a^2, \quad 1 < a, \quad (6)$$

где $K(r)$ — гауссова кривизна эллипсоида (2).

Если $a = 1$, то хорошо известно, что $i(M) = \sigma = l_0/2 = \pi$.

Эллипсоид вращения (2) называется *сплюснутым*, если $0 < a < 1$, и *вытянутым*, если $a > 1$.

Максимум гауссовой кривизны сплюснутого эллипсоида вращения достигается на его экваторе и равен $1/a^2$. Поэтому вследствие известных результатов римановой геометрии σ равно πa , т.е. первому сопряженному значению вдоль экватора. Главный результат статьи [2]: $i(M) = \pi a < l_0/2 < \pi$, если $0 < a < 1$. Кроме того, в [2] еще найдены крачайшие и множества разреза, если $0 < a < 1$.

Основной результат статьи [3] — следующая теорема 1.

Теорема 1. Для радиуса инъективности $i(M)$ каждого вытянутого эллипсоида вращения M , заданного уравнением (2) при $a > 1$, $i(M) = \sigma < \min(\pi, l_0/2)$. При этом $\sigma = \sigma_p$ для любой точки $p \in M$, отличной от полюсов эллипсоида, и такой, что p и ближайшая к p сопряжённая относительно проходящего через p двойного меридиана $m(p)$ точка p' находятся на расстоянии $\sigma(p)/2 = \sigma(p')/2$ вдоль $m(p)$ от одного из полюсов эллипсоида.

Теорема 2. Если M — вытянутый эллипсоид вращения в $\mathbb{R}^3$, то непродолжаемая кратчайшая длины σ — некоторая дуга двойного меридиана эллипсоида.

Предложение 1. Длина $|b(u)|$ векторного поля Якоби на двойном меридиане эллипсоида вращения при $a > 1$ определяется общим решением О.Д.У.

$$b'' + \frac{(a^2 - 1) \sin 2u}{2(1 + (a^2 - 1) \cos^2 u)} b' + \frac{a^2}{1 + (a^2 - 1) \cos^2 u} b = 0, \quad u \in [-\pi/2, 3\pi/2], \quad (7)$$

$$b(u) = c_1 \cos u + c_2 \left(a \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + a \cos u (F(u, k) - E(u, k)) \right), \quad (8)$$

$k = \sqrt{a^2 - 1}/a$, $F(u, k) = \int_0^u (1/\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}) dv$, $E(u, k) = \int_0^u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 v} dv$ — эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода.

Теорема 3. Функция

$$b(u) = \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + \cos u [(F(u, k) - F(\pi/2, k)) - (E(u, k) - E(\pi/2, k))], \quad u \in [0, \pi],$$

симметрична относительно $\bar{u} = \frac{\pi}{2}$ и является решением О.Д.У. (7).

При этом $b(u) = 0$ при $u = u_1 \in (0, \pi/2)$ и $u_2 = \pi - u_1$, где

$$\tan u_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u_1}} [(F(\pi/2, k) - F(u_1, k)) - (E(\pi/2, k) - E(u_1, k))]. \quad (9)$$

Кроме того, длина дуги между двумя соответствующими сопряженными значениями на двойном меридиане равна $2a(E(\pi/2, k) - E(u_1, k))$.

Замечание 1. Величины $F(\pi/2, k)$ и $E(\pi/2, k)$ называются соответственно полными эллиптическими интегралами Лежандра первого и второго рода.

Теорема 4. Длина дуги двойного меридиана между ближайшими нулями $u_1 < u_2$ решения $b(u)$ уравнения (7) для эллипсоида (2) минимальна, если $a > 1$ и

$$0 < u_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = \frac{\pi}{2}.$$

Предложение 2. Для любого $k \in [0, 1)$, существует единственное решение $u_1 = u_1(k)$ уравнения (9) на полуинтервале $[0, \frac{\pi}{2})$.

Лемма 1. Существует дифференцируемая, строго возрастающая функция $u_1 = u_1(k)$, $0 \leq k < 1$, где u_1 — решение уравнения $b(u) = 0$ в теореме 3.

Замечание 2. Из доказательства леммы 1 следует, что равенство (9) эквивалентно равенству $\tan(u_1(k)) = g_k(u_1(k))$, где

$$g_k(u) = \frac{k^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} \int_u^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}} d\tau, \quad u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad k \in (0, 1).$$

Ясно, что $0 < g_k(u)$ для всех $(u, k) \in [0, \frac{\pi}{2}) \times (0, 1)$.

Лемма 2. Пусть $k \in (0, 1)$ фиксировано. Тогда $\arctan(g_k(u)) < u_1(k)$ для всех $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $u \neq u_1(k)$, где $u_1(k)$ — решение уравнения (9).

Следствие 1. Если $G(k) := F(\frac{\pi}{2}, k) - E(\frac{\pi}{2}, k)$, $k \in (0, 1)$, то

$$\arctan(g_k(0)) = \arctan(G(k)) < u_1(k).$$

Предложение 3. Если $x_0 := 0$ и $x_n := \arctan(g_k(x_{n-1}))$, $n \in \mathbb{N}$, то $x_n \nearrow u_1(k)$.

Замечание 3. Определённая в предложении 3 последовательность x_n позволяет получить хорошую оценку для $u_1(k)$ снизу.

Следствие 2. Пусть

$$\sigma_n(a) := 2 \int_{x_n(k)}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (a^2 - 1) \cos^2 \tau} d\tau.$$

Тогда $\sigma_n(a) \searrow \sigma = \sigma(a)$, где

$$\sigma(a) = 2 \int_{u_1(k)}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (a^2 - 1) \cos^2 \tau} d\tau,$$

$x_n(k)$ — последовательность из предложения 3 и $u_1(k)$ — корень уравнения (9) для любого $k = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}$, $a > 1$.

Работа первого автора выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0006. Работа второго автора выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации N°075-15-2025-349 от 29.04.2025.

Литература

1. Sakai T. Riemannian Geometry. Translations of Mathematical Monographs, 149. Providence, RI: American Mathematical Society, 1996.
2. Берестовский В.Н., Мустафа А. Радиус инъективности и кратчайшие сплюснутого эллипсоида вращения // Сиб. матем. журн. 2024. Т. 65, №. 1. С. 15–26.
3. Берестовский В.Н., Мустафа А. Радиус инъективности вытянутого эллипсоида вращения // Сиб. матем. журн. 2025. Т. 66, №. 6. 16 с.
4. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
5. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. М.: Мир, 1968.

Дата поступления в оргкомитет: 31.08.2025

О СУБЛОРЕНЦЕВЫХ ЭКСТРЕМАЛЯХ НА $GL^+(2, \mathbb{C})$ С ПОРОЖДАЮЩИМ ПРОСТРАНСТВОМ ЭРМИТОВЫХ МАТРИЦ В АЛГЕБРЕ ЛИ $\mathfrak{gl}^+(2, \mathbb{C})$

В.Н. Берестовский¹

д.ф.-м. н., профессор, e-mail: vberestov@inbox.ru, SPIN-код: 6393-2941

И.А. Зубарева²

к.ф.-м. н., доцент, e-mail: i_gribanova@mail.ru, SPIN-код: 5376-7441

¹Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

²Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия

Аннотация. Найдены непространственноподобные геодезические и выделены длиннейшие дуги на группе Ли $GL^+(2, \mathbb{C})$ всех комплексных 2×2 -матриц с положительным вещественным определителем, снабженной левоинвариантной сублоренцевой (анти)метрикой d , определяемой естественной структурой четырехмерного пространства–времени Минковского на подпространстве эрмитовых матриц в ее алгебре Ли.

Ключевые слова: сублоренцева а(нормальная) экстремаль, сублоренцева геодезическая, длиннейшая, эрмитовы матрицы, принцип максимума Понтрягина.

Пусть G — связная группа Ли с единичным элементом Id и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ — некоторое подпространство, порождающее алгебру Ли $\mathfrak{g}$ операцией $[\cdot, \cdot]$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — псевдоскалярное произведение сигнатуры $(+, -, \dots, -)$ на $\mathfrak{g}$ с ортонормированным базисом $e_0, e_1, \dots, e_n$, причем векторы $e_0, \dots, e_r$ образуют ортонормированный базис подпространства $\mathfrak{p}$, $v := e_0$ — направленный в будущее единичный вектор. Тройка $(\mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle, v)$ задает левоинвариантную сублоренцеву структуру на группе Ли G , индуцирующую левоинвариантную сублоренцеву (анти)метрику d на G . Здесь $d(g_0, g_1)$ есть точная верхняя граница длин соединяющих $g_0, g_1 \in G$ кусочно непрерывно дифференцируемых горизонтальных направленных в будущее непространственноподобных путей $g = g(t)$, $t \in [0, a]$, т.е. путей с условиями

$$g(0) = g_0, g(a) = g_1, g'(t) = dl_{g(t)}(u(t)), u(t) \in \mathfrak{p}, \langle u(t), v \rangle > 0, \langle u(t), u(t) \rangle \geq 0,$$

где $dl_{g(t)}$ — дифференциал левого сдвига $l_{g(t)} : h \in G \rightarrow g(t)h$; длина каждого такого пути определяется стандартной формулой $L(g) = \int_0^a \sqrt{\langle u(t), u(t) \rangle} dt$. Если для $g_0, g_1 \in G$ таких кривых не существует, то $d(g_0, g_1) := -\infty$.

Горизонтальная направленная в будущее непространственноподобная кривая $g(t)$, $t \in [0, a]$, сублоренцева пространства (G, d) называется *длиннейшей*, если она реализует $\sup$ в формуле сублоренцева расстояния между своими концами $g(0) = g_0$ и $g(a) = g_1$.

Времениподобная длиннейшая $g(t)$, $0 \leq t \leq a = d(x, y)$, соединяющая g_0 с g_1 , есть оптимальное по медленнодействию решение управляемой системы

$$g'(t) = dl_{g(t)}(u(t)), \quad u(t) \in U = \{u \in \mathfrak{p} \mid \langle u, u \rangle \geq 1, \langle u, v \rangle > 0\}, \quad (1)$$

с указанными концевыми точками $g(0) = g_0$, $g(a) = g_1$.

Задача оптимального медленнодействия заключается в нахождении такого измеримого управления $u(t)$, $t \in [0, a]$, что соответствующая ему (т.е. удовлетворяющая системе (1)) липшицева траектория $g(t)$, $t \in [0, a]$, соединяет точки g_0 и g_1 и время a перехода из g_0 в g_1 максимально.

По принципу максимума Понтрягина для задачи (1), каждая оптимальная времениподобная траектория $g(t)$, $0 \leq t \leq T$, определяется некоторым измеримым оптимальным управлением $u = u(t) \in U$, $0 \leq t \leq T$, причем для некоторой абсолютно непрерывной, не обращающейся в нуль ковекторной функции $\psi = \psi(t) \in \mathfrak{g}^*$, $0 \leq t \leq T$, для почти всех $t \in [0, T]$,

$$\dot{g}(t) = dl_{g(t)}(u(t)), \quad \psi(w)' = \psi([u(t), w]), \quad w \in \mathfrak{g},$$

$$M(t) := \psi(t)(u(t)) = \min_{u \in U} \psi(t)(u) := M_0 \geq 0.$$

Времениподобной экстремалью называется направленная в будущее параметризованная длиной дуги кривая $g(t)$ (т.е. $\langle g'(t), g'(t) \rangle = 1$ для п.в. t), удовлетворяющая принципу максимума Понтрягина для задачи (1). Экстремаль называется нормальной (анормальной), если $M_0 > 0$ ($M_0 = 0$).

Некоторые экстремали могут быть одновременно нормальными и анормальными относительно разных ковекторных функций; такие экстремали называются нестрого анормальными. Анормальная экстремаль называется строго анормальной, если она не является нестрого анормальной.

Следующая теорема представляет собой аналог теоремы 9 (субриманов случай) из работы [1].

Теорема 1 ([2]). *Каждая параметризованная длиной дуги времениподобная нормальная экстремаль $g(t)$ сублоренцева пространства (G, d) (с началом в Id) есть решение системы дифференциальных уравнений*

$$g'(t) = dl_{g(t)}(u(t)), \quad u(t) = \psi_0(t)e_0 - \sum_{i=1}^r \psi_i(t)e_i, \quad (2)$$

причем $\langle u(0), u(0) \rangle = 1$, $\psi_0(t) > 0$, и абсолютно непрерывные функции $\psi_i(t)$, $i = 0, \dots, n$, удовлетворяют системе ОДУ

$$\psi_j'(t) = \sum_{k=0}^n \left(C_{0j}^k \psi_0(t) \psi_k(t) - \sum_{i=1}^r C_{ij}^k \psi_i(t) \psi_k(t) \right), \quad j = 0, \dots, n. \quad (3)$$

Здесь C_{ij}^k — структурные константы в указанном базисе $e_0, \dots, e_n$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Определение 1. Изотропной нормальной экстремалью $g(t)$ сублоренцева пространства (G, d) (с началом в Id) называется решение системы ОДУ (2), причем $\langle u(0), u(0) \rangle = 0$, $u(0) \neq 0$, $\psi_0(t) > 0$ и абсолютно непрерывные функции $\psi_i(t)$, $i = 0, \dots, n$, удовлетворяют системе ОДУ (3).

Рассмотрим группу Ли $\text{GL}^+(2, \mathbb{C})$ всех невырожденных комплексных (2×2) -матриц с положительным вещественным определителем. Ее алгебра Ли $\mathfrak{gl}^+(2, \mathbb{C})$ имеет базис

$$e_0 = \frac{\sigma_0}{2}, \quad e_1 = \frac{\sigma_1}{2}, \quad e_2 = \frac{\sigma_2}{2}, \quad e_3 = \frac{\sigma_3}{2}, \quad e_4 = \mathbf{i}e_1, \quad e_5 = \mathbf{i}e_2, \quad e_6 = \mathbf{i}e_3,$$

где

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы e_0, e_1, e_2, e_3 эрмитовы и составляют вещественный базис линейного пространства H всех эрмитовых комплексных (2×2) -матриц. Матрицы e_5, e_6, e_7 косоэрмитовы и составляют базис алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$.

Замечание 1. Алгебра Ли $\mathfrak{gl}^+(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2) \oplus H$, причем

$$[\mathfrak{su}(2), \mathfrak{su}(2)] = \mathfrak{su}(2), \quad [\mathfrak{su}(2), H] \subset H, \quad [H, H] = \mathfrak{su}(2).$$

Следовательно, H порождает алгебру Ли $\mathfrak{gl}^+(2, \mathbb{C})$.

Линейное пространство $H := \text{span}(e_0, e_1, e_2, e_3)$ всех эрмитовых (2×2) -матриц порождает $\mathfrak{gl}^+(2, \mathbb{C})$. Зададим на $\mathfrak{gl}^+(2, \mathbb{C})$ псевдоскалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ сигнатуры $(+, -, \dots, -)$, относительно которого векторы $e_0, e_1, \dots, e_6$ образуют ортонормированный базис. Тройка $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, e_0)$ задает левоинвариантную сублоренцеву структуру на группе Ли $\text{GL}^+(2, \mathbb{C})$, индуцирующую левоинвариантную сублоренцеву (анти)метрику d на $\text{GL}^+(2, \mathbb{C})$. Это отмечено в замечании 5 в [3].

Теорема 2 ([2]). Каждая времениподобная нормальная экстремаль $g(t) = g(\vec{\alpha}, \vec{\beta}; t)$, $t \in \mathbb{R}$, сублоренцевой антиметрики d на $\text{GL}^+(2, \mathbb{C})$ с началом $g(0) = \text{Id}$ есть произведение двух однопараметрических подгрупп

$$g(\alpha_0, \vec{\alpha}, \vec{\beta}; t) = \exp \left(t \sum_{i=0}^6 \alpha_i e_i \right) \exp \left(-t \sum_{i=4}^6 \alpha_i e_i \right) \quad (4)$$

где $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{\beta} = \{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\} \in \mathbb{R}^3$, причем $\alpha_0 = \sqrt{1 + |\vec{\alpha}|^2}$.

Теорема 3 ([2]). Каждая изотропная нормальная экстремаль $g(t) = g(\vec{\alpha}, \vec{\beta}; t)$, $t \in \mathbb{R}$, сублоренцевой антиметрики d на $\text{GL}^+(2, \mathbb{C})$ с началом $g(0) = \text{Id}$ есть произведение двух однопараметрических подгрупп (4), где $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{\beta} = \{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\} \in \mathbb{R}^3$, причем $\alpha_0 = |\vec{\alpha}| = 1$.

Предложение 1 ([2]). Любой отрезок параметризованной длиной дуги однопараметрической подгруппы

$$g(t) = e^{t/2} I = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

есть времениподобная длиннейшая в пространстве $(GL^+(2, \mathbb{C}), d)$.

Предложение 2 ([2]). Каждый отрезок направленной в будущее непространственноподобной однопараметрической подгруппы

$$g(t) = e^{t/2} \exp(tX), \quad t \in \mathbb{R}, \quad X \in H_0 := \text{span}(e_1, e_2, e_3),$$

— длиннейшая в $(GL^+(2, \mathbb{C}), d)$, параметризованная пропорционально длине дуги в случае, если она времениподобная.

Предложение 3 ([2]). Каждый отрезок направленной в будущее непространственноподобной однопараметрической подгруппы

$$g(t) = e^{t/2} \exp(tX), \quad t \in \mathbb{R}, \quad X \in H_0 := \text{span}(e_1, e_2, e_3),$$

— длиннейшая в $(GL^+(2, \mathbb{C}), d)$, параметризованная пропорционально длине дуги в случае, если она времениподобная.

Предложение 4 ([2]). Каждая нормальная непространственноподобная экстремаль сублоренцева пространства $(GL^+(2, \mathbb{C}), d)$ является геодезической, т.е. локально длиннейшей.

Предложение 5 ([2]). Изотропная (параметризованная длиной дуги времениподобная) экстремаль в $(GL^+(2, \mathbb{C}), d)$ нестрого аномальна тогда и только тогда, когда она является 1-параметрической подгруппой с начальным ненулевым изотропным (единичным времениподобным) вектором в $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ или ее левым сдвигом.

Предложение 6 ([2]). Каждый отрезок непространственноподобной нестрого аномальной экстремали — длиннейшая в $(GL^+(2, \mathbb{C}), d)$, параметризованная пропорционально длине дуги для времениподобной экстремали.

Работа первого автора выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0006). Работа второго автора выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0003).

Литература

1. Берестовский В.Н., Зубарева И.А. ПМП, (ко)присоединенное представление и нормальные геодезические левоинвариантных (суб)финслеровых метрик на группах Ли // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 2. С. 43–64.
2. Berestovskii V.N., Zubareva I.A. Sub-Lorentzian geodesics on $GL^+(2, \mathbb{C})$ with the generating space of Hermitian matrices in the Lie algebra $\mathfrak{gl}^+(2, \mathbb{C})$ // Pure and Applied Functional Analysis. 2025. V. 10, N. 2. P. 211–238.
3. Берестовский В.Н. К хронологической теории Сигала // Матем. тр. 2023. Т. 26, N. 1. С. 3–25.

Дата поступления в оргкомитет: 31.08.2025

ГИПОТЕЗА ОБ ОБЪЕМЕ И ДЕТЕРМИНАНТЕ ДЛЯ АЛЬТЕРНИРОВАННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УЗЛОВ

А.Ю. Веснин

д.ф.-м.н., чл-корр РАН, e-mail: vesnin@math.nsc.ru, SPIN-код: 9584-2310

А.А. Егоров

инженер-исследователь, e-mail: a.egorov2@g.nsu.ru, SPIN-код: 7044-6311

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Аннотация. Гипотеза Чампанекара, Кофмана и Парсель об объеме и детерминанте (Vol-Det conjecture) состоит в том, что для альтернированного гиперболического зацепления имеет место неравенство, которое связывает гиперболический объем и детерминант зацепления. Для зацеплений, имеющих более восьми областей скручивания в приведенной диаграмме, мы устанавливаем неравенство на число перекрестков, при выполнении которого гипотеза об объеме и детерминанте верна.

Ключевые слова: Узел, детерминант узла, гиперболический объем узла, число скручиваний..

В настоящее время в теории узлов активно изучаются и применяются инварианты, построенные с использованием как методов алгебраической топологии, так и методов гиперболической геометрии. К первому семейству относятся, прежде всего, полином Александера, полином Джонса, детерминант узла. Ко второму семейству – геометрические инварианты (включая объем) дополнения к узлу, когда оно является гиперболическим многообразием и поле следов представления фундаментальной группы, группа изометрий. Сравнение значений различных инвариантов приводит к возникновению гипотез о связях между инвариантами различного происхождения.

В докладе будет обсуждаться гипотеза, которая связывает объем $\text{vol}(K)$ гиперболического многообразия, являющегося дополнением к зацеплению K , и его детерминант $\det(K)$.

Детерминант $\det(K)$ узла K является одним из наиболее известных инвариантов, который можно вычислить по диаграмме узла. А именно, имеют место следующие равенства:

$$\det(K) = |H_1(\Sigma_2(K), \mathbb{Z})| = |\det(G(K))| = |\det(M + M^T)| = |\Delta_K(-1)| = |V_K(-1)|,$$

где $\Sigma_2(K)$ – двулистное накрытие сферы S^3 , разветвлённое над K , а $|H_1(\Sigma_2(K), \mathbb{Z})|$ – порядок его первой группы гомологий; $G(K)$ – матрица Герица для K ; M – матрица Зейферта для K , а M^T – транспонированная матрица; $\Delta_K(t)$ – полином Александера узла K ; $V_k(t)$ – полином Джонса узла K .

Напомним, что зацепление K в трёхмерной сфере S^3 называется альтернированным, если оно имеет альтернированную диаграмму, то есть такую диаграмму, что при движении вдоль каждой её компоненты чередуются проходы «над» и «под» в перекрёстках. Зацепление K в S^3 называется гиперболическим, если его дополнение $S^3 \setminus K$ является трёхмерным гиперболическим многообразием. Под объёмом гиперболического зацепления K понимают объём его дополнения, $\text{vol}(K) = \text{vol}(S^3 \setminus K)$. Согласно [1], среди 352152252 простых узлов, допускающих диаграммы с не более чем 19 перекрёстками, 352151858 гиперболические, и 51280967 из них альтернированные.

В 2016 г. Чампанекар, Кофман и Парсель сформулировали следующую гипотезу, которую сейчас называют гипотезой об объеме и детерминанте (Vol-Det Conjecture).

Гипотеза [2] Пусть K – альтернированный гиперболический узел. Тогда имеет место неравенство

$$\text{vol}(K) < 2\pi \cdot \log \det(K).$$

Известно, что константа 2π является точной, а именно, для любого $\alpha < 2\pi$ найдётся альтернированный гиперболический узел K_α такой, что $\text{vol}(K_\alpha) > \alpha \cdot \log \det(K_\alpha)$. Доказано, что гипотеза верна для узлов, допускающих диаграммы с не более, чем 16 перекрёстками, для двуместовых узлов и для замыканий кос на трех нитях, см. [2, 3].

Напомним, что функция Лобачевского $\Lambda(\theta)$ задаётся следующей формулой:

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \ln |2 \sin(t)| dt.$$

Обозначим $v_{\text{tet}} = 3\Lambda(\pi/3)$ и $\xi = \exp\left(\frac{5v_{\text{tet}}}{\pi}\right)$. Пусть γ – такое число, что $1/\gamma$ является положительным вещественным корнем уравнения $x^3(x+1)^2 = 1$.

Пусть K – зацепление в трёхмерной сфере, а D – его диаграмма. Областью скручивания диаграммы D называется связный набор двуугольных областей в D , последовательно расположенных в одну линию, который является максимальным в том смысле, что он не является частью более длинного связного набора двуугольников, или же одиночный перекрёсток, инцидентный областям, которые не являются двуугольными. Обозначим через $t(D)$ число областей скручивания диаграммы D .

Например, для диаграммы D узла, приведенной на рис. 2, число областей $t(D)$ скручивания равно 6. Этот узел известен в базах данных узлов как узел 11_{120} . Поскольку непосредственные вычисления дают $\text{vol}(11_{120}) = 15,597714$ и $\det(11_{120}) = 117$, легко убедиться, что для 11_{120} гипотеза об объеме и детерминанте верна.

Теорема 1 ([4]). Пусть K – альтернированный гиперболический узел (или зацепление), для которого приведенная альтернированная диаграмма D имеет $t(D) > 8$ областей скручивания и $c(D)$ перекрёстков. Если выполнено неравенство

$$c(D) \geq t(D) + \frac{\xi^{t(D)-1.4}}{2\gamma^{\frac{t(D)-3}{2}}} - \gamma^{\frac{t(D)+1}{2}},$$

то для K верна гипотеза об объеме и детерминанте.

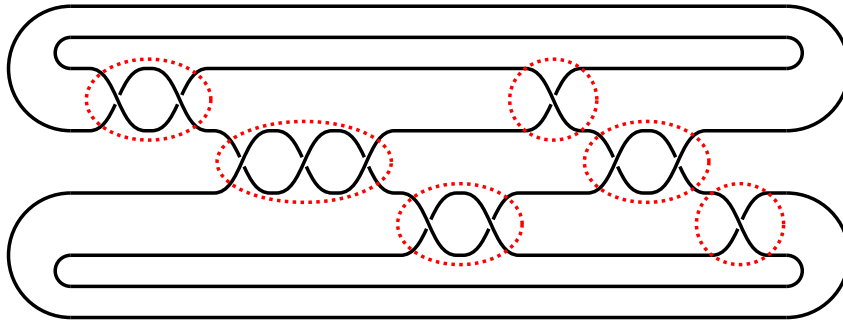


Рис. 1: Диаграмма узла, которая имеет шесть областей скручивания.

Теорема 2 ([4]). Пусть K – нетривиальное нерасщепляемое альтернированное зацепление, имеющее приведенную альтернированную диаграмму D с $t(D) > 8$ областями скручивания. Тогда выполняется следующее неравенство:

$$\text{vol}(K) \leq \frac{10 v_{\text{tet}}}{\log \gamma} \cdot \log \det(K) - \left(\frac{10 v_{\text{tet}} \log 2}{\log \gamma} + 4v_{\text{tet}} \right).$$

Доказательства теорем используют оценки объемов дополнений к зацеплениям через число областей скручивания в диаграммах зацеплений, полученные в [5].

Теорема 1 усиливает результат Братона из [3], а теорема 2 усиливает результат Стойменова из [6] для случая узлов и зацеплений, имеющих альтернированные скрученно-приведенные диаграммы D с $t(D) \geq 8$.

Литература

1. Burton B.A. The next 350 million knots // 36th International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2020) (S. Cabello, D.Z. Chen, eds.). Leibniz Int. Proc. Inform., V.164, Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik. 2020. P. 25:1-25:17. Supplementary Material available at <https://regina-normal.github.io/data.html>
2. Champanerkar A., Kofman I., Purcell J.S. Geometrically and diagrammatically maximal knots // Journal of the London Mathematical Society. 2016. V. 94, No.3, P. 883–908.
3. Burton S.D. The determinant and volume of 2-bridge links and alternating 3-braids // New York Journal of Mathematics. 2018. V. 24. P. 293–316.
4. Egorov A., Vesnin A. The Vol-Det Conjecture for highly twisted alternating links. Preprint arXiv:2411.11711v2 (2024), 10 p.
5. Веснин А.Ю., Егоров А.А. Верхние оценки объемов обобщенных гиперболических многогранников и зацеплений // Сиб. математич. журн. 2024. V. 65, № 3. С. 469–488.
6. Stoimenow A. Graphs, determinants of knots and hyperbolic volume // Pacific Journal of Mathematics. 2007. V. 232, No.2. P. 423–451.

Дата поступления в оргкомитет: 16.05.2025

КОНФОРМНОЕ УРАВНЕНИЕ КИЛЛИНГА НА 2-СИММЕТРИЧЕСКОМ ШЕСТИМЕРНОМ НЕРАЗЛОЖИМОМ ЛОРЕНЦЕВОМ МНОГООБРАЗИИ С ТРИВИАЛЬНЫМ ТЕНЗОРОМ ВЕЙЛЯ

М.Е. Гнедко

аспирант, e-mail: gnedko98@mail.ru, SPIN-код: 1329-7607

О.П. Хромова

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: khromova.olesya@gmail.com, SPIN-код: 7375-6098

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия

Аннотация. В данной работе исследован конформный аналог уравнения Киллинга на шестимерных 2-симметрических неразложимых лоренцевых многообразиях, а также изучены свойства конформного множителя данного уравнения. В случае конформно плоских метрик построены новые нетривиальные примеры конформно киллинговых векторных полей с переменным конформным множителем.

Ключевые слова: конформно киллинговы векторные поля, лоренцевы многообразия, k -симметрические пространства, тензор Вейля..

Конформно киллинговы векторные поля являются естественным обобщением киллинговых векторных полей и играют важную роль в исследовании группы конформных преобразований многообразия, потоков Риччи на многообразии, теории солитонов Риччи. Псевдоримановы симметрические пространства порядка k , где $k \geq 2$, возникают в исследованиях по псевдоримановой геометрии и в физике. В настоящее время, в случаях $k = 2, 3$, они исследованы Д.В.Алексеевским, А.С.Галаевым [1]. В случае малых размерностей эти пространства и векторные поля Киллинга на них изучались Д.Н.Оскорбиным, Е.Д.Родионовым и И.В.Эрнстом [2].

Солитоны Риччи являются обобщением метрик Эйнштейна на (псевдо)римановых многообразиях и их уравнение изучалось на различных классах многообразий многими математиками. В частности, Д.Н.Оскорбиным и Е.Д.Родионовым [3] было найдено общее решение уравнения солитона Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях малой размерности, доказана локальная разрешимость этого уравнения в классе 3-симметрических лоренцевых многообразий. В случае постоянства константы Эйнштейна в уравнении солитона Риччи, векторные поля Киллинга позволяют найти общее решение уравнения солитона Риччи, отвечающее данной константе. Однако, для различных значений константы Эйнштейна, роль полей Киллинга играют конформно киллинговы векторные поля. Поэтому возникает потребность в их изучении.

В данной работе исследован конформный аналог уравнения Киллинга на шестимерных 2-симметрических неразложимых лоренцевых многообразиях, исследованы свойства конформного множителя конформного аналога уравнения Киллинга на них. Установлено, что конформный множитель конформного аналога уравнения Киллинга зависит от поведения тензора Вейля. Если тензор Вейля нетривиален, то конформный множитель постоянен, и данный случай исследован ранее в работах [3, 4]. Если же тензор Вейля тривиален, то конформный множитель и общее решение конформного аналога уравнения Киллинга выражаются через функции Эйри. Кроме того, в случае равенства нулю тензора Вейля, построены новые нетривиальные примеры конформно киллинговых векторных полей с переменным конформным множителем.

Литература

1. Galaev A.S., Alexeevskii D.V. Twosymmetric Lorentzian manifolds // J. Geom. Phys. 2011. V. 61, No. 12. P. 2331—2340.
2. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Эрнст И.В. О размерностях пространства полей Киллинга на 2-симметрических лоренцевых многообразиях, Математические заметки // СВФУ. 2019. Т. 26. № 3. С. 47—56.
3. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. Солитоны Риччи и поля Киллинга на обобщенных многообразиях Кахена—Уоллаха // Сиб. матем. журн. 2019. Т. 60. № 5. С. 1165—1170.
4. Андреева Т.А., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. О конформном множителе в конформном уравнении Киллинга на 2-симметрическом пятимерном неразложимом лоренцевом многообразии // Владикавк. матем. журн. 2023. Т. 25, № 3. С. 5—14.

Дата поступления в оргкомитет: 06.09.2025

ПОТОК РИЧЧИ НА ТРЕХМЕРНЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ ГРУППАХ ЛИ С ЛОРЕНЦЕВОЙ МЕТРИКОЙ И СВЯЗНОСТЬЮ ЛЕВИ-ЧИВИТЫ

Д.С. Григорьев¹

аспирант, e-mail: danila.grigoryev.2019@mail.ru

Д.Н. Оскорбин²

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: oskorbin@yandex.ru

Е.Д. Родионов³

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: edr2002@mail.ru

¹ Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия

² Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

³ Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия

Аннотация. В данной работе изучается поток Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли со связностью Леви-Чивиты. Уравнение потока в системе координат Дж.Милнора приводится к системе дифференциальных уравнений. Найдены частные решения одного из четырех типов ортобазиса на трехмерных унимодулярных группах Ли

Ключевые слова: тензор Риччи, связность Леви-Чивиты, трехмерные группы Ли, лоренцева метрика..

В данной работе симметрические потоки Риччи определяются на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой со связностью Леви-Чивиты.

Пусть M — (псевдо)риманово многообразие размерности n . Определим на M связность Леви-Чивиты ∇ . Связность ∇ является метрической и впервые описана Э. Картаном в [1].

Определим на M однопараметрическое семейство левоинвариантных лоренцевых метрик $g(t)$ и запишем уравнение потока Риччи

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -\text{Ric}(g(t)). \quad (1)$$

Уравнение (1) впервые исследовалось Р. Гамильтоном для связности Леви-Чивиты с римановой метрикой в [2].

Рассмотрен случай, когда G — трехмерная унимодулярная группа Ли. Тогда в алгебре Ли группы G существует ортобазис $\{E_1, E_2, E_3\}$, называемый базисом Дж. Милнора, в котором таблица умножения выглядит особенно просто [3]. Существует четыре различных типа таких ортобазисов.

Рассмотрим один из типов ортобазиса на G , такой что

$$[E_1, E_2] = \alpha_3 E_3, \quad [E_1, E_3] = -\alpha_2 E_2, \quad [E_2, E_3] = \alpha_1 E_1.$$

с времениподобным E_1 .

Также рассмотрим семейство левоинвариантных лоренцевых метрик Дж. Милнора:

$$g = A(\theta^1)^2 + B(\theta^2)^2 + C(\theta^3)^2,$$

где $\{\theta^i\}$ — кобазис к базису Дж. Милнора $\{E_i\}$, метрика невырождена.

Таким образом поток Риччи примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\frac{(\alpha_1 A - \alpha_2 B + \alpha_3 C)(\alpha_1 A + \alpha_2 B - \alpha_3 C)}{2BC}, \\ \frac{dB}{dt} = -\frac{(\alpha_1 A - \alpha_2 B + \alpha_3 C)(\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C)}{2AC}, \\ \frac{dC}{dt} = -\frac{(\alpha_1 A + \alpha_2 B - \alpha_3 C)(\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C)}{2AB}. \end{cases}$$

Найдены точные решения для частных случаев с учетом начальных условий $A(0) = A_0, B(0) = B_0, C(0) = C_0$:

Случай 1. $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\frac{\alpha_1^2}{2} \cdot \frac{A^2}{BC}, \\ \frac{dB}{dt} = -\frac{\alpha_1^2}{2} \cdot \frac{A}{C}, \\ \frac{dC}{dt} = -\frac{\alpha_1^2}{2} \cdot \frac{A}{B}. \end{cases}$$

Решением системы дифференциальных уравнений является:

$$\begin{cases} A(t) = A_0 - \frac{\alpha_1^2 A_0^2}{2B_0 C_0} t, \\ B(t) = B_0 - \frac{\alpha_1^2 A_0}{2C_0} t, \\ C(t) = C_0 - \frac{\alpha_1^2 A_0}{2B_0} t. \end{cases}$$

Случай 2. $\alpha_1 = 0, \alpha_3 = 0$.

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \frac{\alpha_2^2}{2} \cdot \frac{B}{C}, \\ \frac{dB}{dt} = \frac{\alpha_2^2}{2} \cdot \frac{B^2}{AC}, \\ \frac{dC}{dt} = -\frac{\alpha_2^2}{2} \cdot \frac{B}{A}. \end{cases}$$

Решением системы дифференциальных уравнений является:

$$\begin{cases} A(t) = A_0 \left(1 - \frac{\alpha_2^2 B_0}{2A_0 C_0} t\right)^{-1}, \\ B(t) = B_0 \left(1 - \frac{\alpha_2^2 B_0}{2A_0 C_0} t\right)^{-1}, \\ C(t) = C_0 \left(1 - \frac{\alpha_2^2 B_0}{2A_0 C_0} t\right). \end{cases}$$

Случай 3. $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \frac{\alpha_3^2}{2} \cdot \frac{C}{B}, \\ \frac{dB}{dt} = -\frac{\alpha_3^2}{2} \cdot \frac{C}{A}, \\ \frac{dC}{dt} = \frac{\alpha_3^2}{2} \cdot \frac{C^2}{AB}. \end{cases}$$

Решением системы дифференциальных уравнений является:

$$\begin{cases} A(t) = A_0 \left(1 - \frac{\alpha_3^2}{2A_0B_0} t \right)^{-1}, \\ B(t) = B_0 \left(1 - \frac{\alpha_3^2}{2A_0B_0} t \right), \\ C(t) = C_0 \left(1 - \frac{\alpha_3^2}{2A_0B_0} t \right)^{-1}. \end{cases}$$

Замечание: Унимодулярный случай на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой ранее изучался К.Онда и Д.Кнопфом, К.Мак'Леодом [4, 5].

Литература

1. Cartan E., Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) *Ann. Ecole Norm. Sup.*. 1925. Vol. 42. P. 17–88.
2. Hamilton R.S., Three-manifolds With Positive Ricci Curvature *J. Differential Geom.* 1982. Vol. 17. No. 2. P. 255–306.
3. Milnor J., Curvature of Left Invariant Metric On Lie Groups *Advances in mathematics.* 1976. Vol. 21. P. 293–329.
4. Onda K. Ricci Flow on 3-Dimensional Lie Groups and 4-Dimensional Ricci-Flat Manifolds // arXiv:0906.1035. 2010. P. 1-25.
5. Knopf D., McLeod K. Quasi-Convergence of Model Geometries Under the Ricci Flow // *Communications in Analysis And Geometry.* 2001. Vol. 9. No. 4. P. 879–919.

Дата поступления в оргкомитет: 06.09.2025

ИЗМЕНЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ, ПОТОКИ РИЧЧИ С ХИРУРГИЕЙ И МОДАЛЬНАЯ ЛОГИКА S_4

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: aguts@mail.ru, SPIN-код: 3792-6510

Сочинский государственный университет, Сочи, Россия

Аннотация. Противоречие между абсолютностью пространства-времени, описываемого с помощью лоренцевых многообразий, и неизбежным ее нарушением при конструировании временных петель или при полёте кораблей Алькубьерре можно разрешить переходя к формальной теории лоренцевых многообразий, использующей модальную логику S_4 и её лоренцеву семантику без множественности возможных миров типа Крипке, но содержащую потоки Риччи с хирургией.

Ключевые слова: лоренцевы многообразия, абсолютность пространства-времени, модальная логика S_4 , лоренцева семантика, потоки Риччи с хирургией.

Как показали исследования [1], для реализации машины времени, т. е. для образования в 4-мерном лоренцевом многообразии времениподобных гладких петель или для запуска свехбыстрого корабля Алькубьерре, необходимо изменить топологию пространственно-подобного сечения M^3 , представляющего 3-мерное физическое пространство, с целью получения 4-мерных ручек (кротовых нор).

Однако пространство-время, моделируемое посредством 4-мерного лоренцева многообразия, является *абсолютным* в том смысле, что все события как настоящего, так и прошлого или будущего уже даны и не подлежат каким-либо изменениям. Это надо понимать более расширенно – не подлежат изменениям лоренцевы интервалы между точкам (событиями) с точки зрения геометрии и то, какие из событий являются либо внутренними точками, либо предельными. Другими словами, не должны меняться не только метрические, но и топологические отношения между точками (событиями) рассматриваемых областей.

Но это говорит о том, что пространство-время, или Мир событий (мировых точек по Минковскому) априори таково, что там заранее всё есть, всё предусмотрено, всё сформировано, и всё случится в свое время, предопределенное лоренцевой структурой (это для тех, кому нетерпится что-то «запустить», изменить). Машину времени вы «запустите» тогда, когда мировая линия изобретателя подойдет к мировым точкам (событиями), с которых и начинается петля времени.

Сказанное означает полное отсутствие какой-либо свободы воли что-то поменять в окружающем мире, в пространстве-времени. Вряд ли с этим мы можем согласиться. Но такова логика абсолютного Мира событий.

Однако если допустить, что мы вольны менять геометрию и топологию пространства-времени (мы же можем снести гору и тем самым изменить кривизну геометрии данной области), то построение временной петли – это проблемы с причинностью, известные как парадокс дедушки. Для борьбы с желанием нехорошего внука убить дедушку до его знакомства с бабушкой придумывают всякие запретительные принципы, которые явно излишни – как подсказывает теория квантовой машины времени.

Другими словами, выход из противоречивой ситуации состоит в использовании модальной логики, а не классической, для построения синтаксиса (формальной теории) лоренцевых многообразий. И в таком случае при переходе к семантике мы обретаем вполне осмысленную свободу воли – например выбор между возможными мирами, возникающие в случае обращения к семантике Крипке.

Здесь важно отметить, что А.Д. Александров, много написавший об абсолютности пространства-времени и опирающийся на это положение в своих аксиоматизациях специальной теории относительности, при переходе к аксиоматизации общей теории относительности (ОТО) заявил, что пространство-время в ОТО *не совсем* абсолютно [2, с. 103]. «Не совсем» говорит о «сомнении» в достоверности факта, степень же достоверности говорит о модальности логики повествующего. Почему именно модальная логика? В модальной логике формула $\Box A$ «ухватывает динамику», изменение во времени, говоря, что A «не только верно сейчас, но условие A будет верно при всех возможных развитиях ситуации» [3] в будущем.

Но как следует использовать модальную логику, и какую именно модальную логику следует принять при описании лоренцевой геометрической сущности пространства-времени? На каком логическом языке синтаксически нужно описывать теорию лоренцевых многообразий и какую семантику следует искать?

В статье [5] было предложено использовать интуиционистский анализ Кока-Ловера для построения ОТО, в рамках которого имеется формальная теория римановых многообразий. Однако разработанная теоретико-топосная семантика в этом случае привела нас к многомирию типа многомирия Крипке – чего хотелось бы избежать. Поскольку интуиционистский подход I и $S4$ -модальный в принципе идентичны на синтаксическом уровне, как утверждает теорема Гёделя-Тарского: $\vdash_I A \Leftrightarrow \vdash_{S4} f(A)$, где $f : \mathcal{L}_I \rightarrow \mathcal{L}_{S4}$ – отображение Гёделя-Тарского между языками двух логик, то имеет смысл найти лоренцеву семантику для модальной логики $S4$, не ведущую к многомирию, подобного многомирию Крипке.

Если нам важно разобраться с изменениями топологии физического пространства, то следует использовать модальную логику $S4$ и ее топологическую семантику, предложенную Тарским.

Топологическое пространство – это совокупность точек, «склеенных» по некоторым правилам. Это пространство обладает некоторыми особенностями: между любыми двумя точками, возможно, существует чётко определённое расстояние; последовательности точек могут сходиться к одной точке (точке прикосновения); и существуют внутренние точки областей, вокруг которых находятся такие же точки. Переклейка точек – это изменение расстояний, или потеря точкой ее типа (быть предельной (точкой прикосновения), быть внутренней, быть краевой и т.д.). Поток Риччи с хирургией 3-мерного риманова многообразия у Гамильтона или у Перель-

мана – это подобные операции переклейки. А с точки зрения физика – это запуски машины времени или свехбыстрого корабля.

Семантика Тарского – это интерпретация модальностей $\Box A, \Diamond A = \neg \Box \neg A$ как операций вычисления внутренности $Int(A)$ и замыкания $Cl(A)$ множеств топологического пространства. Иначе говоря, «вместо того, чтобы думать о «необходимости» $\Box$ или «модальности» как о выборе некоего набора возможных миров, Тарский рассматривал её как пространственный оператор, который выбирает внутреннюю часть области топологического пространства» [4]. Выбор имеет место и в случае обращения к семантике Крипке (возможные миры), и в случае топологической семантики, где выбирается внутренняя часть, или граница интересующей нас области пространства. Фактически данный выбор и есть свобода воли в совершении изменения топологии физического пространства. Поток Риччи с хирургией 3-многообразия, влекущий потерю связности пространства, есть образования 4-ручки в 4-мерном лоренцевом многообразии.

Таким образом, на уровне описания топологических изменений достаточно обратиться к топологической семантике. Но как быть с изменениями геометрии? Нужна особая геометрическая семантика. В статье [6] хирургия риманова многообразия M^3 , порождающая 4-ручку, определяется через нарушения гладкости производных римановой метрики вдоль семейства гладких кривых при переходе границы шара, при движении из центра шара по кривой вовне. В этом случае, семантика моделирует формулу A как кривую, а $\Box A$ как её лифт в TM^3 . Такая семантика была предложена Халими [7], но она требует доработки. Важно, что переходы в ней к возможным мирам – это переход от одной точки к другой на используемых кривых. В принципе, такое многомирие отвечает динамике образования 4-ручки в пространстве-времени, или рассмотрению потока Риччи с хирургией.

Автор благодарит И.П. Бесценного, указавшего ему на семантику Тарского.

Литература

1. Гуц А.К. Топологические полеты космических варп-кораблей Алькубьерре и потоки Риччи // Математические структуры моделирование. 2025. № 2 (74). С. 61–71.
2. Александров А.Д. Пространство и время в современной физике / Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988.
3. Артемов С.Н. Интуиционистская логика с точки зрения классической // Глобус. Общественно-математический семинар. М.: МЦНМО, 2004. С. 127–141.
4. Lando T.A. Probabilistic Semantics for Modal Logic. A dissertation submitted in partial satisfaction of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. University of California, Berkeley, 2012. 129 p.
5. Гуц А.К. Общая теория относительности, основанная на интуиционистской логике // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. № 4. С. 70–91.
6. Гуц А.К., Подоксёнов М. Н. Топологическое описание образования кротовых нор в общей теории относительности // Пространство, Время и Фундаментальные взаимодействия. 2022. № 4 (41). С. 4–12.
7. Halimi B. Geometric Modal Logic // Notre Dame Journal of Formal Logic. 2023. Vol. 64/3. P. 377–406.

Дата поступления в оргкомитет: 16.08.2025

О КЛАССЕ ЛОСИКА-ЧЕРНА ОДНОГО СЕМЕЙСТВА СЛОЕНИЙ КОРАЗМЕРНОСТИ 2

Ю.Д. Ефременко

аспирант, e-mail: i.efremenko@g.nsu.ru, SPIN-код: 3583-9320

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Аннотация. В настоящей работе рассматривается первый класс Лосика-Черна (CL-класс) слоений коразмерности 2 на расслоениях над окружностью со структурной группой, являющейся циклической подгруппой группы $SL_2(\mathbb{C})$. Вводится понятие числа Лосика-Черна для слоений, имеющих по крайней мере два гиперболических слоя. Исследована тривиальность класса Лосика-Черна таких слоений в зависимости от класса сопряженности матрицы, порождающей подгруппу. Кроме того, получены некоторые результаты о тривиальности первого класса Лосика-Черна пространства орбит комплексной плоскости по действию голоморфного векторного поля.

Ключевые слова: Слоение, пространство слоев, характеристические классы слоений, класс Лосика-Черна, динамические системы, неподвижные точки.

1. Класс Лосика-Черна слоений коразмерности 2

Модифицированные классы Лосика-Черна были определены М.В. Лосиком для слоений коразмерности один [1]. Эти характеристические классы принимают значения в когомологиях пространства струй реперов второго порядка на пространстве листов слоения. В недавних работах [2] и [3] модифицированные классы Лосика-Черна и Годбийона-Вея-Лосика были вычислены для слоения Рибба с произвольной функцией, определяющей асимптотику некомпактных слоев в окрестности компактного слоя. В частности, показана возможная нетривиальность модифицированных классов при тривиальности классических классов Годбийона-Вея.

В настоящей работе рассматривается упрощенная версия первого класса Лосика-Черна, предложенная в работе [4]. Получены явные формулы, определяющие модифицированный класс Лосика-Черна для этого случая. Найдено достаточное условие нетривиальности класса Лосика-Черна для слоений, имеющих по крайней мере два гиперболических слоя. Кроме того, для таких слоений определено число Лосика-Черна – некоторый инвариант, по значению которого можно определить нетривиальность класса. Также рассмотрены слоения на расслоениях над S^1 , порождаемые элементами группы $SL_2(\mathbb{C})$.

Рассмотрим действие $SL_2(\mathbb{C})$ на расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$. Матрица $A \in SL_2(\mathbb{C})$ действует на $\bar{\mathbb{C}}$ как дробно-линейное отображение

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad \varphi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Данное отображение можно продолжить до однопараметрической группы диффеоморфизмов $\varphi_{A,t}$ и определить слоение $\mathcal{F}_A$ на $\bar{\mathbb{C}} \times S^1 \approx S^2 \times S^1$ со слоями

$$L_z = \{(\varphi_{A,t}(z), e^{2\pi it}) : t \in \mathbb{R}\}, \quad z \in \bar{\mathbb{C}}.$$

Отметим, что слой L_z совпадает со слоем $L_{\varphi_A(z)}$.

Для таким образом заданных слоений проведена их классификация с точностью до диффеоморфизма с использованием класса Лосика-Черна. А именно, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть для матрицы $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ построено слоение $\mathcal{F}_A$ по описанной выше процедуре. Тогда выполнено следующее:

- Если $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то первый класс Лосика-Черна слоения $\mathcal{F}_A$ тривиален;
- Если $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ или $A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то первый класс Лосика-Черна слоения $\mathcal{F}_A$ нетривиален;
- Если $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ с $|\lambda| \neq 1$, то первый класс Лосика-Черна слоения $\mathcal{F}_A$ нетривиален. Более того, по числу Лосика-Черна можно явно вычислить значение $|\lambda|$;
- Если $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ с $\lambda \neq 1$, $|\lambda| = 1$, то первый класс Лосика-Черна слоения $\mathcal{F}_A$ тривиален.

2. Дополнение

Также на основе указанных выше примеров получены некоторые общие результаты о тривиальности класса Лосика-Черна пространства орбит $\mathbb{C}/V$, где V — голоморфное векторное поле на комплексной плоскости, имеющее единственную неподвижную точку. Показано, что тривиальность первого класса Лосика-Черна зависит от типа особой точки векторного поля. В частности данный класс различает особые точки типа центр и фокус.

Литература

1. Лосик М.В. О некотором обобщении многообразия и его характеристических классах // Функц. анализ и его прил. 1990. Т. 24, вып. 1. С. 29 – 37.
2. Bazaikin Y.V., Galaev A.S. Losik classes for codimension-one foliations // J. Inst. Math. Jussieu. 2021. V. 21, Is. 4. P. 1391–1419.
3. Bazaikin Y.V., Galaev A.S., Gumenyuk P. Non-diffeomorphic Reeb foliations and modified Godbillon-Vey class // Mathematische Zeitschrift. 2022. V. 300. P. 1335–1349.
4. Bazaikin Ya.V., Efremenko Yu.D., Galaev A.S. On Losik classes of diffeomorphism pseudogroups. arXiv:2505.20778 (2025). URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.20778>.

Дата поступления в оргкомитет: 7.09.2025

ГРУППЫ ГЕЛЬМГОЛЬЦЕВА ТИПА

В.А. Кыров

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: kyrovVA@yandex.ru, SPIN-код: 8220-8157

Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия

Аннотация. Определяются группы гельмгольца типа, то есть псевдогельмгольца, собственно гельмгольца и дуальногельмгольца группы Ли. Описываются поверхности на этих группах Ли. приводятся уравнения Дирака, Вайнгартена и Кодацци в спинорном представлении.

Ключевые слова: поверхность в группе Ли, собственно гельмгольца группа, псевдогельмгольца группа, дуальногельмгольца группа, уравнение Дирака, уравнение Вайнгартена, уравнение Кодацци..

Псевдогельмгольца, собственно гельмгольца и дуальногельмгольца группы Ли соответственно задаются так [1]:

$$G_1 : \begin{pmatrix} e^{\alpha z} & 0 & x \\ 0 & e^{\beta z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$
$$G_2 : \begin{pmatrix} e^{-\gamma z} \cos z & -e^{-\gamma z} \sin z & x \\ e^{-\gamma z} \sin z & e^{-\gamma z} \cos z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$
$$G_3 : \begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ -ze^z & e^z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где (x, y, z) — точка группы Ли. Эти группы Ли в данной статье называются группами гельмгольца типа.

Левоинвариантные метрики и связность на группах Ли G_1 , G_2 и G_3 ранее были вычислены в [1]:

для группы G_1 :

$$\nabla_{e_1} e_1 = \alpha e_3, \nabla_{e_1} e_2 = 0, \nabla_{e_1} e_3 = -\alpha e_1, \nabla_{e_2} e_1 = 0,$$

$$\nabla_{e_2} e_2 = \beta e_3, \nabla_{e_2} e_3 = -\beta e_2, \nabla_{e_3} e_1 = 0, \nabla_{e_3} e_2 = 0, \nabla_{e_3} e_3 = 0;$$

для группы G_2 :

$$\nabla_{e_1} e_1 = -\gamma e_3, \nabla_{e_1} e_2 = 0, \nabla_{e_1} e_3 = \gamma e_1,$$

$$\begin{aligned}\nabla_{e_2} e_1 &= 0, \nabla_{e_2} e_2 = -\gamma e_3, \nabla_{e_2} e_3 = \gamma e_2, \\ \nabla_{e_3} e_1 &= e_2, \nabla_{e_3} e_2 = -e_1, \nabla_{e_3} e_3 = 0;\end{aligned}$$

для группы G_3 :

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1} e_1 &= e_3, \nabla_{e_1} e_2 = -\frac{1}{2}e_3, \nabla_{e_1} e_3 = -e_1 + \frac{1}{2}e_2, \nabla_{e_2} e_1 = -\frac{1}{2}e_3, \\ \nabla_{e_2} e_2 &= e_3, \nabla_{e_2} e_3 = \frac{1}{2}e_1 - e_2, \nabla_{e_3} e_1 = -\frac{1}{2}e_2, \nabla_{e_3} e_2 = \frac{1}{2}e_1, \nabla_{e_3} e_3 = 0.\end{aligned}$$

Далее приводим уравнения Дирака, Вайнгартена и Кодаци для поверхностей, заданных в спинорном представлении на группах гельмгольца типа [2].

Группа G_1 . Уравнения Дирака:

$$\begin{aligned}D\psi &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \right] \psi = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \\ U &= \frac{\alpha + \beta}{4}|\psi_1|^2 + \frac{\alpha - \beta}{4}\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2^2 + \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2), \\ V &= -\frac{\alpha + \beta}{4}|\psi_2|^2 - \frac{\alpha - \beta}{4}\bar{\psi}_2\bar{\psi}_1^2 + \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2).\end{aligned}$$

Уравнения Вайнгартена:

$$\begin{aligned}\partial\psi_1 &= \varphi_z\psi_1 + \psi_2 A e^{-\varphi} + \frac{\alpha + \beta}{4}\psi_1^2\bar{\psi}_2 + \frac{\alpha - \beta}{4}\bar{\psi}_2^3, \\ \partial\psi_2 &= -U\psi_1, \\ \bar{\partial}\psi_1 &= V\psi_2, \\ \bar{\partial}\psi_2 &= \varphi_{\bar{z}}\psi_2 - \psi_1 \bar{A} e^{-\varphi} + \frac{\alpha + \beta}{4}\bar{\psi}_1\psi_2^2 + \frac{\alpha - \beta}{4}\bar{\psi}_1^3.\end{aligned}$$

Уравнения Кодаци:

$$\begin{aligned}\varphi_{z\bar{z}} + \frac{H^2}{4}e^{2\varphi} - |A|^2e^{-2\varphi} &= \frac{(\alpha + \beta)^2}{16}e^{2\varphi} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}(\psi_1^2\psi_2^2 + \bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2) + \\ &+ \frac{(\alpha - \beta)^2}{16}(6|\psi_1|^2|\psi_2|^2 - |\psi_1|^4 - |\psi_2|^4), \\ A_{\bar{z}}e^{-\varphi} - \frac{H_z}{2}e^\varphi &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2^3 - \psi_1^3\psi_2) + \frac{(\alpha - \beta)^2}{4}(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)\psi_1\bar{\psi}_2.\end{aligned}$$

Группа G_2 . Уравнения Дирака:

$$\begin{aligned}D\psi &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \right] \psi = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \\ U &= -\frac{\gamma}{2}|\psi_1|^2 - \frac{i}{2}|\psi_2|^2 + \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2), \\ V &= \frac{\gamma}{2}|\psi_2|^2 + \frac{i}{2}|\psi_1|^2 + \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2).\end{aligned}$$

Уравнения Вайнгартена:

$$\partial\psi_1 = \varphi_z\psi_1 + \psi_2 Ae^{-\varphi} - \frac{\gamma-i}{2}\psi_1^2\bar{\psi}_2,$$

$$\partial\psi_2 = -U\psi_1,$$

$$\bar{\partial}\psi_1 = V\psi_2,$$

$$\bar{\partial}\psi_2 = \varphi_{\bar{z}}\psi_2 - \psi_1\bar{A}e^{-\varphi} - \frac{\gamma-i}{2}\bar{\psi}_1\psi_2^2.$$

Система уравнений Кодацци принимает вид:

$$\varphi_{z\bar{z}} + \frac{H^2 - \gamma^2}{4}e^{2\varphi} - |A|^2e^{-2\varphi} = 0, \quad A_{\bar{z}}e^{-\varphi} - \frac{H_z}{2}e^{\varphi} = 0.$$

Группа G_3 . Уравнения Дирака:

$$D\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \right] \psi = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

$$U = \frac{2+i}{4}|\psi_1|^2 + \frac{i}{4}\frac{\bar{\psi}_1\psi_2^2}{\psi_1} + \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2),$$

$$V = -\frac{2+i}{4}|\psi_2|^2 - \frac{i}{4}\frac{\psi_2\bar{\psi}_1^2}{\psi_2} + \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2).$$

Уравнения Вайнгартена:

$$\partial\psi_1 = \varphi_z\psi_1 + \psi_2 Ae^{-\varphi} + \frac{1}{2}\psi_1 Z_3 + iZ_2^2 e^{-\varphi}\psi_2 - \frac{1}{2}\psi_1 Z_1(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)e^{-\varphi},$$

$$\partial\psi_2 = -U\psi_1,$$

$$\bar{\partial}\psi_1 = V\psi_2,$$

$$\bar{\partial}\psi_2 = \varphi_{\bar{z}}\psi_2 - \psi_1\bar{A}e^{-\varphi} + \frac{1}{2}\psi_2\bar{Z}_3 + i\bar{Z}_2^2 e^{-\varphi}\psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2\bar{Z}_1(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)e^{-\varphi}.$$

Литература

1. Кыров В.А. Левоинвариантные метрики некоторых трехмерных групп Ли // Математические заметки СВФУ. 2023. Т. 30, № 4. С. 24–36, URL: <http://dx.doi.org/10.25587/2411-9326-2023-4-24-36>
2. Кыров В.А. Поверхности на псевдогельмгольцевой группе // Математические заметки. 2025. Т. 117, № 2. С. 285–294. URL: <https://doi.org/10.4213/mzm14390>

Дата поступления в оргкомитет: 05.09.2025

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ ПСЕВДОРИМАНОВЫ СТРУКТУРЫ СО СКРЫТОЙ СИММЕТРИЙ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ИХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

А.А. Магазев

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: magazev@mail.ru, SPIN-код: 2833-036

И.В. Широков

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: iv_shirokov@mail.ru, SPIN-код: 4551-9505

Омский государственный технический университет, Омск, Россия

Аннотация. Рассматривается специальный класс левоинвариантных псевдоримановых метрик на группах Ли, связанный с коизотропными идеалами в соответствующих алгебрах Ли. Обсуждается проблема интегрируемости геодезических потоков таких метрик, в частности, исследуется возможная скрытая симметрия, приводящая к существованию у геодезических потоков дополнительных интегралов движения.

Ключевые слова: Левоинвариантная метрика, коизотропный идеал, геодезический поток, интеграл движения..

Введение

Интерес к левоинвариантным псевдоримановым структурам связан с их уникальным положением, лежащим на стыке алгебры, геометрии, анализа и теоретической физики. Позволяя сводить сложные геометрические задачи к алгебраическим, группы Ли с левоинвариантными метриками являются богатым источником реалистичных и интересных космологических моделей и точных решений в ОТО [1–3]. В рамках указанного направления чрезвычайно важной и глубокой проблемой является проблема интегрируемости геодезических левоинвариантных метрик. Действительно, с тех пор как В.И. Арнольд показал, что уравнения геодезических левоинвариантных метрик на группах Ли сводятся к уравнениям Эйлера на соответствующих коалгебрах [4], внимание специалистов к этой задаче возросло многократно. Непосредственными обобщениями этого класса гамильтоновых систем, которые активно исследуются и по сей день, являются магнитные геодезические левоинвариантных метрик и субримановы геодезические потоки [5, 6].

В настоящей работе мы рассматриваем специальный класс левоинвариантных псевдоримановых метрик на группах Ли, связанный с коизотропными идеалами в соответствующих алгебрах Ли. Основной нашей целью является изучение проблемы интегрируемости геодезических потоков таких метрик, в частности, исследование возможной скрытой симметрии, приводящей к существованию у геодезических потоков дополнительных (неполиномиальных) интегралов движения.

1. Псевдоримановы алгебры Ли с коизотропными идеалами

Пусть G — связная вещественная n -мерная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — её алгебра Ли, отождествляемая с касательным пространством $T_e G$ в единице группы. Псевдориманова метрика g на группе G называется *левоинвариантной*, если она сохраняется при левых сдвигах: $(L_z)_* g = g$, $z \in G$. Здесь $L_z: G \rightarrow G$ — преобразование левого сдвига, отвечающее групповому элементу $z \in G$. Имеется биективное соответствие между левоинвариантными псевдоримановыми метриками g на G и невырожденными симметрическими билинейными формами G на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, задаваемое формулой

$$g(\zeta_1, \zeta_2)|_z = G(dL_{z^{-1}}(\zeta_1), dL_{z^{-1}}(\zeta_2)), \quad \zeta_1, \zeta_2 \in T_z G. \quad (1)$$

Отметим, что пара $(\mathfrak{g}, G)$ называется *псевдоримановой алгеброй Ли*.

Допустим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит коизотропный коммутативный идеал $\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{h}^\perp \subseteq \mathfrak{h}. \quad (2)$$

Здесь $\mathfrak{h}^\perp$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ относительно формы G . Ясно, что размерность такого идеала $\mathfrak{h}$ не может быть произвольной; в силу теоремы о максимальной размерности нулевых подпространств в псевдоримановых пространствах она удовлетворяет неравенству

$$\dim \mathfrak{h} \geq \dim n - \min\{p, n - p\},$$

где $(p, n - p)$ — сигнатура формы G . В частности, если $p = 0$ (риманов случай), тогда $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$, то есть левоинвариантные римановы структуры, подчинённые (2), исчерпываются коммутативными группами Ли. Чуть менее тривиальная ситуация имеет место в лоренцевом случае, когда $p = 1$. Здесь помимо случая $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ имеется также возможность $\dim \mathfrak{h} = n - 1$, то есть $\mathfrak{h}$ — коммутативный идеал коразмерности 1. Если $p > 0$, идеал $\mathfrak{h}$ уже может иметь коразмерность 2 и т.д.

Основной объект нашего исследования — левоинвариантные метрики, ассоциированные с псевдоримановыми алгебрами Ли, содержащими коизотропные коммутативные идеалы. В первую очередь нас будет интересовать проблема интегрируемости соответствующих геодезических потоков, а также уравнений Лапласа–Бельтрами.

2. Геодезические левоинвариантных метрик

В левой тривиализации $T^*G \simeq G \times \mathfrak{g}^*$ уравнения геодезического потока левоинвариантной метрики сводятся к системе уравнений Эйлера–Арнольда на коалгебре $\mathfrak{g}^*$, гамильтоновой относительно скобки Ли–Пуассона. В случае, если псевдориманова алгебра Ли $(\mathfrak{g}, G)$ содержит коизотропный коммутативный идеал $\mathfrak{h}$, отображение $G^\sharp: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$, индуцируемое невырожденной формой G , удовлетворяет условию:

$$G^\sharp|_{\mathfrak{h}^0} \subset \mathfrak{h}. \quad (3)$$

Здесь $\mathfrak{h}^0$ — подпространство в $\mathfrak{g}^*$, аннулирующее идеал $\mathfrak{h}$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, согласованный с идеалом $\mathfrak{h}$, $e^1, \dots, e^n$ — соответствующий

ему дуальный базис в $\mathfrak{g}^*$. Включение (3) означает, что матрица отображения $G^\sharp$ в указанных базисах имеет нулевой блок на главной диагонали, имеющий размеры $(n-s) \times (n-s)$, где $s = \dim \mathfrak{h}$. Таким образом, в левой тривиализации гамильтониан соответствующего геодезического потока будет иметь следующую структуру

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s G^{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta + \sum_{a=s+1}^n \sum_{\beta=1}^s G^{\alpha a} f_\alpha f_a. \quad (4)$$

Здесь $f_1, \dots, f_n$ — координаты элемента $f \in \mathfrak{g}^*$ в базисе $e^1, \dots, e^n$.

Функции Казимира алгебры Ли $\mathfrak{g}$ являются интегралами движения всякой гамильтоновой системы на коалгебре $\mathfrak{g}^*$. Гамильтониан вида (4) может допускать дополнительные интегралы движения, являющиеся функциями $F = F(f_1, \dots, f_s)$, определёнными на аннуляторе $\mathfrak{h}^0$ и являющиеся решениями уравнения:

$$\{H, F\} = - \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^s \sum_{b=s+1}^n G^{\alpha b} C_{\beta b}^\gamma f_b f_\gamma \frac{\partial F}{\partial f_\beta} = 0.$$

В ряде случаев таких интегралов достаточно, чтобы обеспечить (некоммутативную) интегрируемость соответствующего геодезического потока. Примечательно, что интегралы движения геодезического потока, порождаемые этими функциями, в общем случае не являются полиномиальными по импульсам.

Отметим также ещё одно важное свойство рассматриваемых метрик. Выбирая на орбитах коприсоединённого представления группы G поляризованные канонические координаты Дарбу (π, q) [7], геодезический поток рассматриваемых метрик можно редуцировать к семейству гамильтоновых систем на орбитах, гамильтонианы которых линейны по «импульсным» переменным π . В докладе мы подробно обсудим это свойство и как оно влияет на интегрируемость соответствующих геодезических потоков. Мы также рассмотрим несколько конкретных примеров.

Литература

1. Ryan M.P., Shepley L.C. Homogeneous relativistic cosmologies. Princeton, 1975.
2. Петров А.З. Пространства Эйнштейна. М.: Гос.изд.физ.-мат.лит., 1961. 463 с.
3. Anderson I., Torre C. Spacetime groups // Journal of Mathematical Physics. 2020. V. 61, N. 7. P. 072501.
4. Арнольд В.И. О геодезических на группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Доклады АН СССР. 1966. Т. 168, N. 5. С. 1043-1045.
5. Jovanović B., Šukilović T., Vukmirović S., Almost multiplicity free subgroups of compact Lie groups and polynomial integrability of sub-Riemannian geodesic flows // Letters in Mathematical Physics. 2024. V. 114, N. 14.
6. Магазев А.А., Широков И. В., Юревич Ю. А., Интегрируемые магнитные геодезические потоки на группах Ли // Теоретическая и математическая физика. 2008. Т. 156, No. 2. С. 189-206.
7. Широков И.В. Координаты Дарбу на К-орбитах и спектры операторов Казимира на группах Ли // Теоретическая и математическая физика. 2000. Т. 123, No. 3. С. 407-423.

Дата поступления в оргкомитет: 07.09.2025

АНАЛОГ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ПЛОСКОЙ СВЯЗНОСТИ С НЕТЕНЗОРОМ КРУЧЕНИЯ И НЕТЕНЗОРОМ КРИВИЗНЫ

К.В. Полякова

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: polyakova_@mail.ru, SPIN-код: 2956-1618

Балтийский федеральный университет имени И. Канта, Калининград, Россия

Аннотация. Изучается аффинная связность в расслоении, ассоциированном с многообразием, структурные уравнения и деривационные формулы которого построены с помощью деформаций внешнего и обычного дифференциалов. Кривизна и кручение аффинной связности на этом многообразии не являются тензорами. Связность является полусимметрической в случае симметричности или равенства нулю тензора деформации этой связности. Построен аналог симметрической плоской связности.

Ключевые слова: Возмущение дифференциала, несимметричные реперы и ко-реперы 2-го порядка, объекты кручения и кривизны, плоская связность, полусимметрическая связность.

Рассмотрим отображения $\check{D}\omega = D\omega + (df \wedge \omega)|_{\wedge^2 T^*}$, $\check{d}v = dv + d(v(f^\xi))\partial_\xi|_{T^*}$, представляющие собой деформации внешнего дифференциала D в кокасательном пространстве T^*X_m и обычного дифференциала d в касательном пространстве TX_m гладкого многообразия X_m . Здесь

$$f = f(x^i, x^\xi), f^\xi = f^\xi(x^i), v = v^i \partial_i, d(v(f^\xi)) = v^i d(\partial_i f^\xi), \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \partial_\xi = \frac{\partial}{\partial x^\xi},$$

где x^j — локальные координаты точки на многообразии, x^ξ — слоевые координаты. Индексы принимают следующие значения: $i, j, k = 1, \dots, m; \xi = m+1, \dots, m+m^2$, причем $(x^\xi) = (x_j^i)$ и $f^\xi = f|_{x^\xi=1, \dots, 0}$. Слоеые координаты 1-го порядка x_j^i образуют невырожденную матрицу с обратной матрицей (x^i_j) . Многообразие, структурные уравнения и деривационные формулы которого построены с помощью деформаций внешнего и обычного дифференциалов, будем обозначать $\check{X}_m$. Вдоль любой линии ρ на многообразии $\check{X}_m$ справедливо $\check{D}^2|_\rho = 0$.

Пусть $T\check{X}_m = \text{span}(\varepsilon_i)$ и $T^*\check{X}_m = \text{span}(\omega^i)$ — касательное и кокасательное пространства к многообразию $\check{X}_m$ в его текущей точке; $\omega^i(\varepsilon_j) = \delta_j^i$, $\omega^i = x_j^i dx^j$, $\varepsilon_i = x^j_i \partial_j$. Для построенных дифференциалов имеем: $\check{D}\omega^i = D\omega^i + N_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k$, $\check{d}\varepsilon_i = d\varepsilon_i + N_{ij}^\xi \omega^j \otimes \partial_\xi$, где $N_{jk}^i = x^l_{[j} \delta^i_{k]} \partial_l f$, $N_{jk}^\xi = x^l_i x^k_j \partial_{ij} f^\xi$.

Структурные уравнения главного расслоения кореперов над m -мерным многообразием $\check{X}_m$ имеют вид (см. [1, 2])

$$\begin{aligned} \check{D}\omega^i &= \omega^j \wedge \check{\omega}_j^i, \quad \check{D}\check{\omega}_j^i = \check{\omega}_j^k \wedge \check{\omega}_k^i + \omega^k \wedge \check{\omega}_{jk}^i; \\ \check{\omega}_j^i &= -x_j^k dx_k^i - \check{x}_{jk}^i \omega^k, \quad \check{\omega}_{jk}^i = \check{\Delta} \check{x}_{jk}^i + (\check{x}_{j[k}^s \check{x}_{s]l}^i - \check{x}_{jkl}^i) \omega^l, \end{aligned}$$

$\check{x}_{[jk]}^i = -N_{jk}^i$. Слоевые координаты 3-го порядка $\check{x}_{jkl}^i$ симметричны только по последним двум индексам. Оператор $\check{\Delta}$ действует по закону $\check{\Delta}S_j^i = dS_j^i + S_j^l \check{\omega}_k^i - S_k^i \check{\omega}_j^l$. Альтернирование форм $\check{\omega}_{jk}^i$ имеет вид $\check{\omega}_{[jk]}^i \equiv -\check{\Delta}N_{jk}^i \pmod{\omega^k}$, т.е. при фиксации точки многообразия имеем $\check{\omega}_{[jk]}^i \Big|_{\omega^l=0} = x_{[j}^{*s} \delta_{k]}^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^\xi \partial x^s} dx^\xi$.

Касательное пространство 2-го порядка $T^2\check{X}_m$ многообразия $\check{X}_m$ натянуто на векторы ε_i , $\check{\varepsilon}_{ij} = \check{x}_i^l \check{x}_j^k \partial_{lk} + \check{x}_{ij}^k \varepsilon_k + \check{x}_i^l \check{x}_j^k N_{lk}^\xi \partial_\xi$, причем $\partial_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i \partial x^j}$, $\check{\varepsilon}_{[ij]} = -N_{ij}^k \varepsilon_k$.

Аффинная связность в главном расслоении задается по Г.Ф. Лаптеву с помощью форм $\check{\omega}_j^i = \check{\omega}_j^i - \check{\Gamma}_{jk}^i \omega^k$ ($\check{\Delta}\check{\Gamma}_{jk}^i + \check{\omega}_{jk}^i = \check{\Gamma}_{jk,l}^i \omega^l$).

Поскольку объект кручения $\check{T}_{jk}^i = \check{\Gamma}_{[jk]}^i$ аффинной связности удовлетворяет сравнениям $\check{\Delta}\check{T}_{jk}^i \equiv \check{\Delta}N_{jk}^i$, то кручение не является тензором, а аффинная связность на многообразии $\check{X}_m$ всегда с кручением: $\check{\Delta}\check{T}_{jk}^i \equiv x_{[j}^{*s} \delta_{k]}^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^\xi \partial x^s} dx^\xi$.

Рассмотрим разложение $\check{\Gamma}_{jk}^i = \gamma_{jk}^i - \check{x}_{jk}^i$ с использованием тензора деформации $\gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i(x^l, x^p)$ от канонической аффинной связности $\check{\Gamma}_{jk}^i = -\check{x}_{jk}^i$ к произвольной связности. Для слоевых координат 2-го порядка $\check{x}_{jk}^i$ справедливо $\check{x}_{[jk]}^i = -N_{jk}^i$, т.е. N_{jk}^i — это кручение канонической связности.

Известно, что связность является полусимметрической, если ее тензор кручения S_{ij}^k имеет вид

$$S_{ij}^k = \frac{1}{m-1} (\delta_i^k \eta_j - \delta_j^k \eta_i),$$

где $\eta_j = S_{ij}^i$, δ_i^k — символ Кронекера.

Для свертки $N_k = N_{ik}^i$ имеем $N_k = \frac{1-m}{2} \check{x}_k^l \partial_l f$, поэтому $N_{jk}^i = \frac{1}{m-1} (\delta_j^i N_k - \delta_k^i N_j)$. Следовательно, слоевые координаты $\check{x}_{jk}^i$ на многообразии $\check{X}_m$ являются полусимметрическими. Формы $\check{\omega}_{jk}^i$, так же как и координаты $\check{x}_{jk}^i$, являются полусимметрическими.

Альтернируя разложение $\check{\Gamma}_{jk}^i = \gamma_{jk}^i - \check{x}_{jk}^i$, получим разложение для компонент объекта кручения $\check{T}_{ij}^k = \gamma_{[ij]}^k + N_{ij}^k$. Несимметрия связности $\check{\Gamma}_{jk}^i$ на многообразии $\check{X}_m$ обусловлена в первую очередь несимметрией координат $\check{x}_{jk}^i$, и симметричность тензора γ_{jk}^i не влечет за собой симметричность связности $\check{\Gamma}_{jk}^i$. В случае нулевого или симметричного тензора деформации γ_{jk}^i ($\gamma_{[ij]}^k = 0$) кручение выражается по формуле $\check{T}_{jk}^i = -\check{x}_{[jk]}^i = N_{jk}^i$ и $\check{\Gamma}_{jk}^i$ будет полусимметричной.

Теорема 1. Если тензор деформации γ_{jk}^i симметричен или равен нулю, то связность $\check{\Gamma}_{jk}^i$ является полусимметрической.

Рассмотрим оснащающие векторы $\check{\varepsilon}_{ij} = \check{\varepsilon}_{ij} + \check{\Gamma}_{ij}^k \varepsilon_k$, $\check{\Delta}\check{\varepsilon}_{ij} \equiv 0 \pmod{\omega^k}$. Несимметричные векторы $\check{\varepsilon}_{ij} = \check{x}_i^l \check{x}_j^k (\partial_{lk} + \gamma_{lk}^\xi \partial_\xi) + \gamma_{ij}^k \varepsilon_k$ заданы в касательном пространстве 2-го порядка $T^2\check{X}_m$; $\check{E} = \text{span}(\check{\varepsilon}_{ij}) \subset T^2\check{X}_m$.

Если тензор деформации γ_{ij}^k симметричен, то касательное пространство 2-го порядка $T^2\check{X}_m$ распадается в прямую сумму $T^2\check{X}_m = T\check{X}_m \oplus \check{E}$. В этом случае векторы $\check{\varepsilon}_{ij}$ являются горизонтальными векторами 2-го порядка для аффинной связности 1-го порядка.

Структурные уравнения для форм $\tilde{\omega}_j^i$ имеют вид $\tilde{D}\tilde{\omega}_j^i = \tilde{\omega}_j^k \wedge \tilde{\omega}_k^i + \frac{1}{2}\tilde{R}_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l$. Компоненты объекта кривизны $\tilde{R}_{jkl}^i = \tilde{\Gamma}_{j[k,l]}^i - \tilde{\Gamma}_{j[k}^s \tilde{\Gamma}_{|s|l]}^i$ можно выразить следующим образом: $\tilde{R}_{jkl}^i = \partial_s \gamma_{j[k}^i x_{l]}^{*s} - \gamma_{js}^i N_{kl}^s - \gamma_{j[k}^s \gamma_{|s|l]}^i$. Поскольку компоненты объекта кривизны удовлетворяют сравнениям $\tilde{\Delta}\tilde{R}_{jkl}^i \equiv -\gamma_{js}^i \tilde{\Delta}N_{kl}^s \pmod{\omega^k}$, то объект кривизны образует тензор только при $\tilde{\gamma}_{jk}^i = 0$, т.е. лишь для канонической связности $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$, причем в этом случае $\tilde{R}_{jkl}^i = 0$. Из сравнений для объектов кручения и кривизны, а также тензорности объекта деформации γ_{jk}^i вытекает следующий результат.

Теорема 2. Деформация γ_{js}^i и кручение $\tilde{T}_{kl}^s$ аффинной связности индуцируют кривизну этой связности по формуле

$${}^T\tilde{R}_{jkl}^i = -\gamma_{js}^i \tilde{T}_{kl}^s.$$

Для касательных векторов $u = u^i \varepsilon_i$, $v = v^i \varepsilon_i$, $w = w^i \varepsilon_i$ на многообразии $\tilde{X}_m$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_u v - \tilde{\nabla}_v u - [u, v] &= u^i v^j (\tilde{T}_{jk}^i - N_{jk}^i) \varepsilon_i, \\ \tilde{\nabla}_u \tilde{\nabla}_v w - \tilde{\nabla}_v \tilde{\nabla}_u w - \tilde{\nabla}_{[u,v]} w &= w^j (\tilde{R}_{jkl}^i + \tilde{\gamma}_{js}^i N_{kl}^s) u^k v^l \varepsilon_i, \end{aligned}$$

причем $\tilde{\nabla}_u v = u^j \tilde{\nabla}_j v^i \varepsilon_i$, где $\tilde{\nabla}_j v^i = x_j^{*k} \partial_k v^i - v^k \gamma_{kj}^i$.

Теорема 3. На многообразии $\tilde{X}_m$ симметрическая деформация γ_{jk}^i аффинной связности $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ выделяет класс полусимметрических связностей ${}^N\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ с кручением $\tilde{T}_{ij}^k = N_{ij}^k$ и кривизной $\tilde{R}_{jkl}^i = -\gamma_{js}^i N_{kl}^s$, определяемых соотношениями

$$\nabla_u v - \nabla_v u = [u, v], \quad \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w = \nabla_{[u,v]} w$$

и представляющих собой аналог симметрической плоской связности, заданной на многообразии X_m .

Условие $\gamma_{jk}^i = 0$ выделяет из ${}^N\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ каноническую связность $\tilde{\Gamma}_{jk}^i = -\tilde{x}_{jk}^i$, которая является плоской и полусимметрической. В работе [2] отмечено, что при использовании неголономных реперов симметричные связности не выделяются; в этом случае любые связности (в том числе и связности без кручения) имеют несимметричные компоненты.

Литература

1. Полякова К.В. О связности, кручение и кривизна которой не являются тензорами // ДГ-МФ. Калининград, 2023. Вып. 54. С. 29—44.
2. Рыбников А.К. Об обобщенных аффинных связностях второго порядка. Изв. вузов. Матем., 1983. № 1. С. 73—80.

Дата поступления в оргкомитет: 12.08.2025

САМОПОДОБНОЕ ЛОРЕНЦЕВО МНОГООБРАЗИЕ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТРЁХМЕРНОЙ ГРУППЫ ЛИ

М.Н. Подоксёнов

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com, SPIN-код: 5120-2532

Н.С. Герасимович

студентка, e-mail: n96872685@gmail.com

Витебский государственный университет имени П.М.Машерова

Витебск, Республика Беларусь

Аннотация. Рассматривается специальная трёхмерная неунимодулярная группа Ли. На ней строится левоинвариантная лоренцева метрика, относительно которой эта группа Ли превращается в самоподобное многообразие. Найдены формулы, по которым действует существенная однопараметрическая группа подобий, оставляющая неподвижным единичный элемент группы Ли.

Ключевые слова: Самоподобное многообразие, группа Ли, алгебра Ли, левоинвариантная метрика, автоподобие.

Риманово или лоренцево многообразие называется *самоподобным*, если оно допускает существенную однопараметрическую группу подобий. Цель данной работы – построить самоподобное лоренцево многообразие одной специальной трёхмерной группы Ли. Для ряда других трёхмерных и четырёхмерных групп Ли эта задача была решена в работах [1] – [4].

Алгебра Ли G называется *унимодулярной*, если для любого вектора $x \in G$ выполнено $\text{trace ad}(X) = 0$. Все трёхмерные неунимодулярные алгебры Ли содержат двумерный коммутативный идеал $\mathcal{L}$, являющийся унимодулярным ядром алгебры Ли. Если выбрать базис (E_1, E_2, E_3) так, что $(E_2, E_3) \in \mathcal{L}$, матрица линейного преобразования $\text{ad}(E_3)|_{\mathcal{L}}$ полностью определяет алгебру Ли с точностью до изоморфизма [5]. Среди всех трёхмерных неунимодулярных алгебр Ли выделяется одна, у которой такое преобразование является тождественным при подходящем выборе вектора E_3 . Тем самым, коммутационные соотношения определяются равенствами

$$[E_1, E_2] = E_2, [E_1, E_3] = E_3, [E_2, E_3] = \vec{0}. \quad (1)$$

Назовём эту алгебру Ли *специальной* и обозначим её $\mathcal{S}_3$. Любой базис в $\mathcal{S}_3$, для которого коммутационные соотношения имеют вид (1), будем называть каноническим. В работе [6] найдены матричные представления алгебры Ли $\mathcal{S}_3$ и соответствующей связной односвязной группы Ли S_3 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & u_1 & 0 & u_3 \\ u_1 & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_1, u_2, u_3 \in \mathbf{R},$$

$$X = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x_1 & 0 & \operatorname{sh} x_1 & x_2 \\ 0 & e^{x_1} & 0 & x_3 \\ \operatorname{sh} x_1 & 0 & \operatorname{ch} x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}.$$

Этим матрицам приписываем координаты (u_1, u_2, u_3) и (x_1, x_2, x_3) . Тогда групповая операция, обратный элемент, экспоненциальное отображение и обратное к нему отображение задаются соответственно формулами:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, y_2 e^{x_1} + x_2, y_3 e^{x_1} + x_3),$$

$$(x_1, x_2, x_3)^{-1} = (-x_1, e^{-x_1} x_2, e^{-x_1} x_3).$$

$$\exp(u_1, u_2, u_3) = \left(u_1, \frac{u_2}{u_1}(e^{u_1} - 1), \frac{u_3}{u_1}(e^{u_1} - 1) \right),$$

$$\exp^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, \frac{x_1 x_2}{e^{x_1} - 1}, \frac{x_1 x_3}{e^{x_1} - 1} \right).$$

Последние формулы содержат устранимые неопределенности при $u_1 \rightarrow 0$ и $x_1 \rightarrow 0$.

Группа Ли S_3 является экспоненциальной, при этом экспоненциальное отображение биективно.

Также в работе [6] найдены формулы, по которым действует полная группа движений группы Ли S_3 , снабжённой левоинвариантной римановой метрикой, и дана алгебраическая характеристика этой группы движений.

Две левоинвариантные метрики на одной группе Ли мы относим к одному классу, если соответствующие многообразия изометричны.

Теорема 1. *На группе Ли S_3 существует единственный класс левоинвариантных лоренцевых метрик, при котором данная группа Ли превращается в самоподобное многообразие. Для метрики из данного класса в естественных координатах метрический тензор задаётся матрицей*

$$[g(X)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -e^{-x_1} \\ 0 & e^{-2x_1} & 0 \\ -e^{-x_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

а однопараметрическая группа подобий, оставляющая неподвижным единичный элемент группы Ли, действует по формулам

$$\begin{cases} x'_1 = x_1, \\ x'_2 = e^{\mu t} x_2, \\ x'_3 = e^{2\mu t} x_3, \end{cases} \quad (3)$$

$\mu > 0, t \in \mathbf{R}$.

Доказательство. В алгебре Ли S_3 можно выбрать канонический базис так, что она допускает однопараметрическую группу автоподобий. Матрица Грама этого базиса и матрица, задающая действие указанной группы, имеют соответственно вид:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[F_t] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\mu t} \end{pmatrix}, \mu > 0, t \in \mathbf{R}.$$

Здесь, и в дальнейшем, используем обозначение $[F_t]$ – матрица преобразования F_t .

Находим матрицу, обратную к матрице дифференциала левого сдвига $(L_X)_* : T_Y G_3 \rightarrow T_{XY} G_3$ в произвольной точке $Y \in S_3$:

$$W = [(L_X)_*]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-x_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x_1} \end{pmatrix}.$$

С её помощью находим матрицу метрического тензора g в точке $X(x_1, x_2, x_3)$ по формуле $[g(X)] = W^T(X) \Gamma W(X)$. Получаем матрицу (2).

Мы строим однопараметрическую группу подобий, оставляющую неподвижным единичный элемент группы Ли по формуле $f_t = \exp \circ F_t \circ \exp^{-1}$. Находим, что преобразования f_t действуют по формулам (1).

Для того, чтобы убедиться, что построенная однопараметрическая группа преобразований действительно является группой подобий, мы находим матрицу дифференциала $[(f_t(X))_*]$ и обратную к ней матрицу

$$I_t = [(f_t(X))_*]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\mu t} \end{pmatrix}.$$

Затем по формуле $[(f_t)^* g(X)] = I_t^T [g(X)] I_t$ находим матрицу метрического тензора $(f_t)^* g(X)$:

$$[(f_t)^*g(X)] = e^{-2\mu t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -e^{-x_1} \\ 0 & e^{-2x_1} & 0 \\ -e^{-x_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что $[(f_t)^*g(X)] = e^{-2\mu t}[g(X'(t))]$, где $X'(t) = f_t(X)$. Это означает, что построенная однопараметрическая группа преобразований $\{f_t\}$ состоит из подобий для левоинвариантного метрического тензора (2). Эта группа является существенной, потому что она имеет неподвижную точку – единичный элемент группы, и для любого $t \neq 0$ дифференциал преобразования f_t в этой точке является подобием. ■

Заключение. Мы построили самоподобное однородное лоренцево многообразие специальной неунимодулярной трёхмерной группы Ли. Наша ближайшая задача: найти полную группу подобий данного многообразия и выяснить, является ли оно плоским или нет.

Литература

1. Подоксёнов М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой // Вестник ВГУ. 2011. № 5. С. 10–15.
2. Подоксёнов М.Н., Линкевич М.В. Самоподобное однородное лоренцево многообразие группы Ли $SE(1, 1)$ // Математические структуры и моделирование. 2024. № 2(70). С. 21–28.
3. Подоксёнов М.Н., Гуц А.К. Четырёхмерные самоподобные однородные многообразия группы Ли $HS \times R^+$ // Вестник Витебского государственного университета имени П.М. Машерова. 2022. № 1. С. 5–10.
4. Подоксёнов М.Н., Шпакова Ю.А. Самоподобное однородное лоренцево многообразие группы Ли $SE(2) \times R^+$ // Математические структуры и моделирование. 2023. № 1(65). С. 46–54.
5. Milnor J. Curvatures of left-invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. 1976. V. 21. P. 293–329.
6. Подоксёнов М.Н., Ян Г. Полная группа изометрий специальной трёхмерной группы Ли // Математические структуры и моделирование. 2024. № 3(71). С. 33–43.

Дата поступления в оргкомитет: 16.08.2025

КАУСТИКИ ПАРАБОЛОИДА И ЗАДАЧА АПОЛЛОНИЯ

Я.Н. Алиев

к.м.н., доцент, e-mail: yaliyev@ada.edu.az, ORCID-код: 0000-0003-1698-4297

Университет АДА, Баку, Азербайджан

Аннотация. Мы изучаем каустики эллиптической параболоиды. В статье продемонстрированы два способа задания этой поверхности: один — в декартовых координатах с использованием формулы для главных кривизн, другой — в параболических координатах с применением формулы Зайделя. Найдя кривые пересечения этих каустик с параболоидом, мы расширяем решение Ф. Каспари классической задачи Аполлония о числе нормалей, пересекающихся в одной точке, к точкам самой параболоиды. Представлена полная классификация всех возможных случаев пересечения этих каустик с соответствующим параболоидом.

Ключевые слова: поверхность, кривая, нормали, каустики.

Аполлоний в пятой книге своего труда «Конические сечения» задаёт вопрос о нормалях: сколько нормалей к эллипсу могут проходить через одну точку? Его решение, весьма сложное, показало, что существуют точки, играющие роль границы, где число нормалей скачкообразно меняется с 2 до 4. Сейчас кривую, состоящую из таких точек, мы называем каустикой. Эта задача естественным образом обобщается на параболу и оказывается проще, чем в случае эллипса, хотя и остаётся нетривиальной. Задача о числе нормалей к эллипсу также входит в сборник задач В. И. Арнольда «Математический тривиум», который он считал обязательным минимумом для студентов-физиков. Эта же задача была предложена на Первой Всесоюзной математической олимпиаде для студентов вузов СССР в 1974 году и была полностью решена только одним студентом. Каустики эллипса и гиперболы исследовались в связи с задачами оптики Ареуром Кэли. Более подробная история этой задачи и её обобщения на эллипсоид и параболоид изложена в статьях автора [1], [2]. Задача о числе нормалей исследовалась Кэли, Якобсталем и другими, а в более общем виде — Клебшем, Салмоном. Число нормалей имеет прямую интерпретацию как число положений статического равновесия данного тела, если центр масс находится в точке A . Это фундаментальное свойство описано, например, в классической книге Постона и Стюарта. В этой книге отмечается, что связь с каустиками стала одной из отправных точек для Тома в разработке его теории катастроф.

В данной работе мы сосредотачиваем внимание на каустиках эллиптической параболоиды и их применении для определения числа нормалей, пересекающихся в одной точке на параболоиде. Каустики параболоиды, а также задача о нормалях были темами докторских диссертаций Ф. Каспари (1875) и Г. Шрёдера (1913). Работы Ф. Каспари (1875) содержат подробное исследование задачи о нормалях в общем

виде. Нам же интересен случай когда эти нормали пересекаются на самой параболоиде.

1. Парабола

Рассмотрим параболу

$$y = \frac{ax^2}{2}. \quad (1)$$

Рассмотрим точку $A(l, m)$ на её плоскости и найдём такую точку $B(x, y)$ на параболке, нормаль к которой в точке B проходит через точку A . Каустикой этой параболы будет полукубическая парабола

$$(ay - 1)^3 = \frac{27}{8}a^2x^2, \quad (2)$$

также называемой параболой Нейля, которая разделяет области плоскости, в которых число нормалей скачкообразно меняется с 1 на 3 и наоборот. Заметим, что нормали параболы (1) являются касательными к полукубической параболке (2). Ниже, на и выше полукубической параболы, которая также служит местом центров кривизны для параболы (1), число нормалей равно 1, 2 и 3 соответственно. Исключением является точка $(0, \frac{1}{a})$, которая является фокусом параболы (1) и точкой заострения (куспидой) полукубической параболы (2). Эта точка лежит на кривой (2), но число нормалей в ней равно 1. На параболке (1) число нормалей скачкообразно изменяется с 1 до 3 или обратно в точках $C_i \left(\pm \frac{2\sqrt{2}}{a}, \frac{4}{a} \right)$, которые являются точками пересечения кривых (1) и (2). Это полностью решает классическую задачу Аполлония о числе нормалей параболы, проходящих через одну точку.

2. Параболоид

Рассмотрим теперь параболоид

$$z = \frac{ax^2 + by^2}{2}. \quad (3)$$

В криволинейных координатах u, v , аналогичных параболическим координатам, этот параболоид можно параметризовать следующим образом:

$$(x(u, v))^2 = \frac{b(au - 1)(av + 1)}{a^2(b - a)}, \quad (y(u, v))^2 = -\frac{a(bu - 1)(bv + 1)}{b^2(b - a)},$$

$$z(u, v) = \frac{ab(u - v) - a - b}{2ab}. \quad (4)$$

Теперь опишем точки A в пространстве, для которых число нормалей скачкообразно меняется с 1 до 3 или с 3 до 5. Хорошо известно, что точки A , в которых две нормали к поверхности совпадают, являются центрами главных кривизн этой поверхности. Поверхность, образованная этими точками, известна под разными названиями:

эволюта, фокальная поверхность или центрическая поверхность (поверхность центров). Используя формулу для главных кривизн через гауссову и среднюю кривизну можно записать формулу для координат центров главных кривизн параболоиды как

$$(X, Y, Z) = (x, y, z) + R_{1,2} \cdot \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}, \quad (5)$$

где $\vec{N}$ нормальный вектор, $R_{1,2} = \frac{1}{H \mp \sqrt{H^2 - K}}$ — главные радиусы кривизны, а

$$H = \frac{a + b + a^2bx^2 + ab^2y^2}{2(1 + a^2x^2 + b^2y^2)^{3/2}}, \quad K = \frac{ab}{(1 + a^2x^2 + b^2y^2)^2}$$

— средняя и гауссова кривизны соответственно.

В криволинейных координатах u, v эти две каустики могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned} (x(u, v))^2 &= \frac{b(au - 1)(av + 1)^3}{a^2(b - a)}, & (y(u, v))^2 &= -\frac{a(bu - 1)(bv + 1)^3}{b^2(b - a)}, \\ z(u, v) &= \frac{ab(u - 3v) - a - b}{2ab}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя выражения из (6) в (3), получаем $u = \frac{v}{av + bv + 3}$. Подставляя это значение в (6) и обозначив $v = t$, получаем параметризацию линии пересечения поверхности (3) с её каустикой (6) в виде:

$$\begin{aligned} (x(t))^2 &= \frac{b(bt + 3)(at + 1)^3}{a^2(a - b)((a + b)t + 3)}, & (y(t))^2 &= -\frac{a(at + 3)(bt + 1)^3}{b^2(a - b)((a + b)t + 3)}, \\ z(t) &= -\frac{3ab(a + b)t^2 + (a^2 + 10ab + b^2)t + 3(a + b)}{2ab((a + b)t + 3)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Эта кривая по видимому не было исследовано в ранних работах.

Литература

1. Aliyev Y.N. Apollonius Problem and Caustics of an Ellipsoid // International Electronic Journal of Geometry. 2024. V. 17, Iss. 2. P. 402–420. URL: <https://doi.org/10.36890/iejg.1368456> (дата обращения: 26.07.2025).
2. Aliyev Y. N. Caustics of a Paraboloid and Apollonius Problem // International Electronic Journal of Geometry. 2025. (in press).
3. Caspari F. Die Krümmungsmittelpunktsfläche des elliptischen Paraboloids. – Dissert., Reimer, Berlin, 1875. <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN310966825>
4. Schröder H. Die Zentraflächen der Paraboloid und Mittelpunktsflächen zweiten Grades. – Dissert., Halle a. S., H. John, 1913. <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN316295612> (дата обращения: 26.07.2025).

Дата поступления в оргкомитет: 27.07.2025

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Н.Я. Алиев¹

к.ф.м.н., доцент, e-mail: nacaaliyev@bsu.edu.az

Ф.Н. Алиев²

к.ф.м.н., e-mail: fnaaliyev@ada.edu.az

¹Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан

²Азербайджанская дипломатическая Академия, Баку, Азербайджан

Аннотация. В данной работе изучается отображение поверхностей евклидовых пространств $V_2 \subset E_4$ и $\bar{V}_2 \subset \bar{E}_4$ как вполне ортогональных подпространств в собственном евклидовом пространстве E_8 , имеющих одну общую точку O . Мы исследуем свойства сопряженных сетей и поверхностей Фосса при этом отображении. Доказано, что сети σ_2 и $\bar{\sigma}_2$ соответствуют отображению T тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- 1) сети σ_2 и $\bar{\sigma}_2$ совпадают с основанием отображения T ,
- 2) отображение T является конформным.

Мы также показываем, что база отображения T гармонически разделяет сопряженные сети Σ_2 и $\bar{\Sigma}_2$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $\vec{C}_{12} (C_{12}^3 \vec{e}_1 - C_{12}^4 \vec{e}_2) = 0$. Наконец, мы устанавливаем существование пары поверхностей Фосса 14 функций одного аргумента.

В работе использован метод подвижного репера и метод внешних форм Картана.

Ключевые слова: Евклидово пространство, поверхность Фосса, отображения n -мерных поверхностей.

Рассмотрим евклидовы пространства E_4 и $\bar{E}_4$ как вполне ортогональные подпространства в собственном евклидовом пространстве E_8 , имеющие одну общую точку O . Пусть V_2 и $\bar{V}_2$ гладкие поверхности в E_4 и $\bar{E}_4$ соответственно. Будем изучать дифференцируемое взаимно однозначное отображение T области $\Omega \subset V_2$ на область $\bar{\Omega} \subset \bar{V}_2$. Если точка X_1 пописывает область $X_2 = T(X_1) \subset \bar{\Omega}$, то точка X с радиусом-вектором $\vec{X} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2$, ($O\vec{X} = \vec{X}$, $O\vec{X}_1 = \vec{X}_1$, $O\vec{X}_2 = \vec{X}_2$), опишет некоторую двумерную поверхность V_2^* , называемую графиком отображения T . Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Сети σ_2 и $\bar{\sigma}_2$ соответствуют в отображение T тогда и только тогда, когда выполняются одну из следующих условий:

- 1) сети σ_2 и $\bar{\sigma}_2$ совпадают с основанием отображения T ,
- 2) отображение T является конформным.

Теорема 2. Если поверхности V_2 и $\bar{V}_2$ несут сопряженные сети и эти сети соответствуют, то сети σ_2 и $\bar{\sigma}_2$ служат основания отображения T тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\vec{C}_{12} [(C_{12}^4 \bar{\gamma}^{1i} - C_{12}^3 \bar{\gamma}^{2i}) \vec{e}_{4+i}] = 0$$

Теорема 3. Основание отображения T гармонический разделяет сопряженные сети Σ_2 и $\bar{\Sigma}_2$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $\vec{C}_{12} (C_{12}^3 \vec{e}_1 - C_{12}^4 \vec{e}_2) = 0$.

Теорема 4. Пара поверхностей V_2 и $\bar{V}_2$, несущих сопряженные сети, соответствующие в отображении T , определяется заданием четырех функций от двух аргументов. Заметим, что произвольная пара поверхностей V_2 и $\bar{V}_2$, определяется заданием шести функций от двух аргументов (на задание каждой из поверхностей $V_2 \subset E_4$ и $\bar{V}_2 \subset E_4$ по две функции и две функции на задание отображения $T: \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$).

Теорема 5. Если поверхности V_2 и $\bar{V}_2$ несут ортогональные сопряженные сети и эти сети соответствуют, то сети Σ_2 и $\bar{\Sigma}_2$ соответствуют в этом отображении T тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

- 1) $C_{12}^3 = 0, C_{12}^4 \neq 0$ (или $C_{12}^4 = 0, C_{12}^3 \neq 0$). Здесь C_{12}^3, C_{12}^4 одновременно в нуль не обращается, так как $\text{rang } \|C_{ij}^h\| = 3$. Это геометрически означает, что вектор $\vec{C}_{12}$ либо коллинеарен с вектором $\vec{E}_3$, либо с $\vec{E}_4$.
- 2) Отображение T является конформным. Учитывая, что вектор $\vec{C}_{12}$ имеет следующее разложение

$$\vec{C}_{12} = \vec{m} - \vec{n}$$

Следствие 3. Пусть $\bar{\Sigma}_2 = T(\Sigma_2)$ и пусть сети Σ_2 и $\bar{\Sigma}_2$ ортогональны и сопряженные. Сеть Σ_2^* графика V_2^* будет сетью линий кривизны относительно средней нормали тогда и только тогда, когда

$$\vec{M}^* \cdot \vec{m} = \vec{M}^* \cdot \vec{n}$$

где $\vec{M}^*$ есть вектор средней нормали поверхности V_2^* .

Литература

1. Базилев В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств // Уч. зап. МГПИ им. В.И.Ленина, 1970. № 374, Т. 1, С. 41–51.
2. Алиев Н.Я. К геометрии отображений поверхностей евклидовых пространств // Ученые записки АГУ, сер. физ.-матем. наук. 1979. № 5. С. 23–29.
3. Алиев Н.Я. Об одном случае отображений поверхностей коразмерности два евклидовых пространств // ДАН Азерб.ССР. 1983. Т. 39, вып.4. С. 3–7.
4. Aliyev N. On mappings of p -dimensional surfaces in Euclidean spaces E_n // International Electronic Journal of Geometry. 2020. V. 13, No. 1. P. 17–20. URL: <https://doi.org/10.36890/iejg.633279>.

Дата поступления в оргкомитет: 25.08.2025

О ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ 6-МЕРНОЙ СФЕРЫ

М.Б. Банару

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: mihail.banaru@yahoo.com, SPIN-код: 1392-5918

Г.А. Банару

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: mihail.banaru@yahoo.com, SPIN-код: 9011-7084

Смоленский государственный университет, Смоленск, Россия

Аннотация. Представлены структурные уравнения Картана почти контактной метрической структуры на ориентируемой гиперповерхности 6-мерной сферы с канонической приближенно келеровой структурой.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, гиперповерхность, 6-мерная сфера, приближенно келерово многообразие..

Еще с середины XX века известно, что шестимерная сфера S^6 допускает приближенно келерову структуру, причем S^6 – первый известный пример отличного от келерова почти эрмитова многообразия [1]. Различные аспекты геометрии приближенно келерова многообразия S^6 всегда привлекали (и привлекают) внимание многих специалистов в области эрмитовой геометрии. Отметим, что среди авторов статей о приближенно келеровой 6-мерной сфере есть как всеми признанные классики эрмитовой геометрии А. Грей, Е. Калаби, К. Секигава, В.Ф. Кириченко, так и многие другие математики. По нашему мнению, для каждого специалиста в области эрмитовой геометрии стало негласным правилом получать какие-либо результаты, связанные с приближенно келеровой 6-мерной сферой. Авторы настоящего сообщения специализируются преимущественно в области геометрии 6-мерных многообразий с интегрируемой почти эрмитовой структурой (приближенно келерова структура таковой не является). Однако им также удалось получить несколько результатов, связанных с 6-мерной сферой, оснащенной канонической приближенно келеровой структурой [2], [3], [4].

В наше время внимание исследователей привлекает и другое 6-мерное многообразие, допускающее приближенно келерову структуру – произведение двух трехмерных сфер $S^3 \times S^3$. За последние годы по этой тематике вышло множество интересных работ, среди которых мы особо выделим статьи [5], [6], [7], [8], а также две совсем новые работы [9], [10]. Отметим, что произведение трехмерных сфер не связано с так называемыми 3-векторными произведениями в алгебре октав [11]. В своей самой первой значительной работе замечательный отечественный геометр В.Ф. Кириченко установил [12], что только на 6-мерной сфере приближенно келерова структура порождается 3-векторными произведениями в алгебре Кэли.

В данной работе мы представляем структурные уравнения Картана почти контактной метрической структуры на ориентируемой гиперповерхности 6-мерного приближенно келерова многообразия S^6 .

Напомним, что почти контактной метрической структурой на многообразии нечетной размерности N^{2n-1} называется четверка тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$, если выполняются следующие условия [13]:

$$\begin{aligned}\eta(\xi) &= 1; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta; \\ \langle \Phi X, \Phi Y \rangle &= \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(N^{2n-1}).\end{aligned}$$

Здесь ξ – структурный вектор, η – структурная форма, Φ – поле тензора типа $(1, 1)$, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика, через $\mathfrak{X}(N^{2n-1})$ обозначен модуль гладких векторных полей на многообразии N^{2n-1} .

Также напомним [13], что заданную на многообразии четной размерности M^{2n} пару $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ называют почти эрмитовой структурой, если J – почти комплексная структура, а $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика. При этом J и $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ должны удовлетворять такому соотношению

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n}).$$

Многообразие, на котором фиксирована почти эрмитова структура, называется почти эрмитовым. Со всякой почти эрмитовой структурой $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ на многообразии M^{2n} связано поле 2-формы, которая определяется равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n})$$

и называется фундаментальной (иногда – келеровой) формой структуры. Почти эрмитово многообразие называется приближенно келеровым (nearly Kählerian, НК-многообразием, иногда W_1 -многообразием [14]), если

$$\nabla_X (F) (X, Y) = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n}).$$

Наш основной результат содержит

Теорема 1. *Первая группа записанных в адаптированном репере структурных уравнений почти контактной метрической структуры, индуцированной на ориентируемой гиперповерхности 6-мерного приближенно келерова многообразия S^6 , имеет следующий вид:*

$$\begin{aligned}d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta \wedge \omega_\gamma + \\ &+ i\sigma_\beta^\alpha \omega^\beta \wedge \omega + \left(-\sqrt{2}\tilde{B}^{3\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}^{\alpha\beta 3} + i\sigma^{\alpha\beta} \right) \omega_\beta \wedge \omega; \\ d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \\ &- i\sigma_\alpha^\beta \omega_\beta \wedge \omega + \left(-\sqrt{2}\tilde{B}_{3\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}_{\alpha\beta 3} - i\sigma_{\alpha\beta} \right) \omega^\beta \wedge \omega; \\ d\omega &= \sqrt{2}B_{3\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \sqrt{2}B^{3\alpha\beta} \omega_\alpha \wedge \omega_\beta - \\ &- 2i\sigma_\beta^\alpha \omega^\beta \wedge \omega_\alpha + \left(\tilde{B}_{3\beta 3} + i\sigma_{3\beta} \right) \omega \wedge \omega^\beta + \left(\tilde{B}^{3\beta 3} - i\sigma_3^\beta \right) \omega \wedge \omega_\beta.\end{aligned}$$

Здесь функции $\{B^{abc}\}, \{B_{abc}\}$ являются компонентами тензоров Кириченко, $\{\tilde{B}^{abc}\}, \{\tilde{B}_{abc}\}$ – компонентами модифицированных тензоров Кириченко [15]; σ – вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности в 6-мерное приближенно келерово многообразие S^6 ; $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$; $a, b, c = 1, 2, 3$.

Литература

1. Gray A. Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois J. Math. 1966. V.10, No. 2. P. 353–366.
2. Abu-Saleem A., Banaru M. On almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // Malaysian Journal of Mathematical Sciences. 2014. V. 8, No. 1. P. 35–46.
3. Banaru M., Banaru G. A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Series III. Mathematics, Informatics, Physics. 2015. T. 8, No. 2. P. 21–28.
4. Abu-Saleem A., Banaru M.B., Banaru G.A. A note on 2-hypersurfaces of the nearly Kählerian six-sphere // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2017. Т. 85, № 3. С. 107–114.
5. Antić M. A class of slant surfaces of the nearly Kähler $S^3 \times S^3$ // Hacettepe J. Math. Stat. 2018. V. 47, No.2. P. 251–260.
6. Djorić Mil., Djorić Mir., Moruz M. Geodesic lines on nearly Kähler $S^3 \times S^3$ // J. Math. Anal. Geom. 2018. V. 46. P. 1099–1108.
7. Diaoos B., Vrancken L., Wang X. Lagrangian submanifolds in the homogeneous nearly Kähler $S^3 \times S^3$ // Ann. Glob. Anal. Geom. 2018. V. 53, No. 1. P. 39–66.
8. Daurtseva N.A., Smolentsev N.K. On almost complex structures on six dimensional products of spheres // J. Math. Sci., New York. 2020. V. 245, No. 5. P. 568–600.
9. Cho J.T., Kim S. Hypersurfaces in 6-dimensional nearly Kähler manifolds // Toyama Math. J. 2024. V. 45. P. 1–31.
10. Antić M., Kocić D. Hypersurfaces of the sphere $S^6(1)$ with four-dimensional nullity distribution // J. Geom. Phys. 2025. V. 213.
11. Gray A. Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products // Tôhoku Math. J. 1969. V. 21, N. 4. P. 614–620.
12. Кириченко В.Ф. Почти келеровы структуры, индуцированные 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Вестник Московского университета. Сер.1. Математика. Механика. 1973, № 3. С. 70–75.
13. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Одесса: Печатный дом, 2013. 458 с.
14. Банару М.Б. Почти контактные метрические гиперповерхности с типовым числом 1 или 0 в приближенно келеровых многообразиях // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2014, № 3. С. 60–62.
15. Банару М.Б., Банару Г.А. О гиперповерхностях со структурой Кириченко-Ускорева в келеровых многообразиях // Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 1715–1721.

Дата поступления в оргкомитет: 07.09.2025

ОБЪЕКТ НЕАБСОЛЮТНЫХ ПЕРЕНЕСЕНИЙ ДЛЯ КОКОНГРУЭНЦИИ

О.О. Белова

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgaobelova@mail.ru, SPIN-код: 8664-1683

Балтийский федеральный университет имени И. Канта, Калининград, Россия

Аннотация. В проективном пространстве P_n рассмотрена коконгруэнция $K_{(n-m)m}$. Вводится и исследуется объект неабсолютных перенесений. Доказано, что данный объект является псевдотензором.

Ключевые слова: Коконгруэнция, связность, ковариантный дифференциал, объект кривизны, объект неабсолютных перенесений.

1. Введение

Теория многомерных плоскостей проективного пространства, являющаяся одной из наиболее красивых и интересных областей дифференциальной геометрии, находит применение в интегральной геометрии и теоретической физике.

r -мерный комплекс K_r m -мерных плоскостей — это r -мерное подмногообразие грассмана многообразия $Gr(m, n)$ m -мерных плоскостей проективного пространства P_n , где $r < (m+1)(n-m)$. Мы пользуемся терминологией В.И. Близника [2], который дал классификацию подмногообразий $Gr(m, n, r)$ многообразия Грассмана $Gr(m, n)$ и назвал комплекс $K_{(n-m)m}$ коконгруэнцией m -мерных плоскостей.

В проективном пространстве P_n рассмотрим m -мерную плоскость L_m ($1 \leq m < n$). При специализации подвижного репера $\{A, A_i\}$ ($i = 1, \dots, n$) путем помещения вершин A, A_a на плоскость L_m уравнения стационарности данной плоскости имеют вид $\omega^\alpha = 0$ и $\omega_a^\alpha = 0$. Здесь и в дальнейшем индексы принимают значения $a, b, c, \dots = 1, \dots, m$; $\alpha, \beta, \gamma, \dots = m+1, \dots, n$.

Коконгруэнция $K_{(n-m)m}$ m -мерных плоскостей L_m задается уравнениями $\omega^\alpha = \Lambda_\beta^{\alpha a} \omega_a^\beta$ (см. [1]), причем дифференциальные уравнения на компоненты фундаментального объекта 1-го порядка $\Lambda = \{\Lambda_\beta^{\alpha a}\}$ имеют вид

$$\Delta \Lambda_\beta^{\alpha a} + \Lambda_\gamma^{\alpha b} \Lambda_\beta^{\gamma a} \omega_b - \delta_\beta^\alpha \omega^a = \Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha b} \omega_b^\gamma,$$

где $\Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha a} = \Lambda_{\gamma\beta}^{\alpha a}$, а Δ — дифференциальный оператор.

С коконгруэнцией $K_{(n-m)m}$ ассоциируется главное расслоение $G_s(K)$ с базой — коконгруэнцией $K_{(n-m)m}$, а типовым слоем — s -членной подгруппой G_s стационарности плоскости L_m , где $s = n(n+1) - m(n-m-1)$.

На коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ способом Лаптева — Лумисте задается связность при помощи следующих преобразований слоевых форм:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_b^a &= \omega_b^a - \Gamma_{b\alpha}^{ac} \omega_c^\alpha, & \tilde{\omega}^a &= \omega^a - \Gamma_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha, & \tilde{\omega}_\alpha^a &= \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta, \\ \tilde{\omega}_\beta^\alpha &= \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a} \omega_a^\gamma, & \tilde{\omega}_a &= \omega_a - \Gamma_{a\alpha}^b \omega_b^\alpha, & \tilde{\omega}_\alpha &= \omega_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^a \omega_b^\beta.\end{aligned}\quad (1)$$

Связность в главном расслоении задается с помощью поля объекта групповой связности $\Gamma = \{\Gamma_{b\alpha}^{ac}, \Gamma_\alpha^{ab}, \Gamma_{\alpha\beta}^{ab}, \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}, \Gamma_{a\alpha}^b, \Gamma_{\alpha\beta}^a\}$ на базе $K_{(n-m)m}$ (см. [1]).

Учитывая во внешних дифференциалах форм связности (1) дифференциальные уравнения компонент объекта фундаментально-групповой связности Γ , находим формулы, по которым вычисляются компоненты объекта кривизны R

$$\begin{aligned}R_{b\alpha\beta}^{ace} &= \Gamma_b^{[ce] \alpha} - \Gamma_b^d [c \Gamma_{d\beta}^{ae}] - \delta_b^a \Gamma_{d[\alpha}^{[c} \Gamma_{\beta]}^{de]} - \Gamma_b^{[c} \Gamma_{[\alpha}^{ae]}, \\ R_{\alpha\beta\gamma}^{abc} &= \Gamma_\alpha^{[bc] \gamma} - \Gamma_\alpha^e [b \Gamma_{e\gamma}^{ac}] - \Gamma_\alpha^\mu [b \Gamma_{\mu\gamma}^{ac}] - \Gamma_\alpha^{[b} \Gamma_{\gamma]}^{ac}, \\ R_{\alpha\beta}^{abc} &= \Gamma_{[\alpha}^{[bc] \gamma} - \Gamma_{[\alpha}^e [b \Gamma_{e\beta]}^{ac}], \\ R_{\beta\gamma\mu}^{\alpha ab} &= \Gamma_\beta^{[ab] \gamma \mu} - \Gamma_\beta^\eta [a \Gamma_{\eta\mu}^{\alpha b}] - \delta_\beta^\alpha \Gamma_{c[\gamma}^{[a} \Gamma_{\mu]}^{cb}], \\ R_{a\alpha\beta}^{bc} &= \Gamma_a^{[bc] \alpha \beta} - \Gamma_a^e [b \Gamma_{e\beta}^{c\alpha}], \\ R_{\alpha\beta\gamma}^{ab} &= \Gamma_\alpha^{[ab] \beta \gamma} - \Gamma_\alpha^c [a \Gamma_{c\gamma}^{b\beta}] - \Gamma_\alpha^\mu [a \Gamma_{\mu\gamma}^{b\beta}],\end{aligned}$$

здесь квадратные скобки означают альтернирование по парам индексов.

Замечание 1. Объект кривизны R связности Γ на коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ является псевдотензором, который содержит два подпсевдотензора $R_1 = \{R_{e\alpha\beta}^{abc}, R_{\alpha\beta}^{abc}, R_{c\alpha\beta}^{ab}\}$ и $R_2 = \{R_1, R_{\beta\gamma\mu}^{\alpha ab}\}$.

Осуществим композиционное оснащение комплекса $K_{(n-m)m}$, присоединив к каждой плоскости L_m $(n-m-1)$ -мерную плоскость C_{n-m-1} , не имеющую общих точек с плоскостью L_m , и точку $C = A + \lambda^a A_a$. Плоскость C_{n-m-1} зададим совокупностью точек $C_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a + \lambda_\alpha A$. Плоскость C_{n-m-1} является аналогом плоскости Э. Картана. Прямая сумма данной плоскости и плоскости L_m дает все проективное пространство P_n . Точка $C = A + \lambda^a A_a$ принадлежит плоскости L_m и не принадлежит плоскости N_{m-1} — аналогу нормали 2-го рода А.П. Нордена. Прямая сумма данной точки и плоскости N_{m-1} дает плоскость L_m .

2. Объект неабсолютных перенесений

Внесем в дифференциальные уравнения оснащающего квазитензора $\lambda = \{\lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha, \lambda^a\}$ формы связности $\tilde{\omega}$ (1), получим выражения ковариантных дифференциалов компонент объекта λ

$$\begin{aligned}\nabla \lambda^a &= d\lambda^a + \lambda^b \tilde{\omega}_b^a - \lambda^a \lambda^b \tilde{\omega}_b + \tilde{\omega}^a, & \nabla \lambda_\alpha &= d\lambda_\alpha - \lambda_\beta \tilde{\omega}_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^a \tilde{\omega}_a + \tilde{\omega}_\alpha, \\ \nabla \lambda_\alpha^a &= d\lambda_\alpha^a + \lambda_\alpha^b \tilde{\omega}_b^a - \lambda_\beta^a \tilde{\omega}_\alpha^\beta + \lambda_\alpha \tilde{\omega}^a + \tilde{\omega}_\alpha^a,\end{aligned}$$

Используя дифференциальные сравнения компонент объекта кривизны R , находим внешние дифференциалы от ковариантных дифференциалов

$$\begin{aligned} D\nabla\lambda^a &= \nabla\lambda^b \wedge \tilde{\omega}_b^a - \nabla(\lambda^a\lambda^b) \wedge \tilde{\omega}_b + T_{\alpha\beta}^{abc}\omega_b^\alpha \wedge \omega_c^\beta, \\ D\nabla\lambda_\alpha^a &= \nabla\lambda_\alpha^b \wedge \tilde{\omega}_b^a - \nabla\lambda_\beta^a \wedge \tilde{\omega}_\alpha^\beta + \nabla\lambda_\alpha \wedge \tilde{\omega}^a + T_{\alpha\beta\gamma}^{abc}\omega_b^\beta \wedge \omega_c^\gamma, \\ D\nabla\lambda_\alpha &= -\nabla\lambda_\beta \wedge \tilde{\omega}_\alpha^\beta + \nabla\lambda_\alpha^a \wedge \tilde{\omega}_a + T_{\alpha\beta\gamma}^{ab}\omega_a^\beta \wedge \omega_b^\gamma. \end{aligned}$$

При внешнем дифференцировании ковариантного дифференциала появляется объект $T = \{T_{\alpha\beta}^{abc}, T_{\alpha\beta\gamma}^{abc}, T_{\alpha\beta\gamma}^{ab}\}$ неабсолютных перенесений с компонентами, зависящими от компонент объекта кривизны групповой связности и композиционно оснащающего квазитензора

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^{abc} &= R_{\alpha\beta}^{abc} + \lambda^e R_{e\alpha\beta}^{bc} - \lambda^a \lambda^e R_{e\alpha\beta}^{bc}, \quad T_{\alpha\beta\gamma}^{ab} = R_{\alpha\beta\gamma}^{ab} - \lambda_\mu R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu ab} + \lambda_\alpha^c R_{c\beta\gamma}^{ab}, \\ T_{\alpha\beta\gamma}^{abc} &= R_{\alpha\beta\gamma}^{abc} - \lambda_\mu^a R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu bc} + \lambda_\alpha R_{\beta\gamma}^{abc} + \lambda_\alpha^e R_{e\beta\gamma}^{abc}. \end{aligned}$$

Теорема 1. Объект $T = \{T_{\alpha\beta}^{abc}, T_{\alpha\beta\gamma}^{abc}, T_{\alpha\beta\gamma}^{ab}\}$ неабсолютных перенесений является псевдотензором, который содержит два подпсевдотензора $T_1 = \{T_{\alpha\beta}^{abc}\}$ и $T_2 = \{T_{\alpha\beta\gamma}^{abc}, T_{\alpha\beta\gamma}^{ab}\}$.

Доказательство. Находим дифференциальные сравнения компонент объекта T по модулю базисных форм ω_a^α

$$\begin{aligned} \Delta T_{\alpha\beta}^{abc} + (T_{\alpha\gamma}^{abe}\Lambda_\beta^\gamma + T_{\gamma\beta}^{aec}\Lambda_\alpha^\gamma - \lambda^e T_{\alpha\beta}^{abc} - \lambda^a T_{\alpha\beta}^{ebc})\omega_e &\equiv 0, \\ \Delta T_{\alpha\beta\gamma}^{abc} + (T_{\alpha\beta\mu}^{abe}\Lambda_\gamma^\mu + T_{\alpha\mu\gamma}^{aec}\Lambda_\beta^\mu)\omega_e + T_{\alpha\beta\gamma}^{bc}\omega^a &\equiv 0, \\ \Delta T_{\alpha\beta\gamma}^{ab} + (T_{\alpha\beta\gamma}^{cab} + T_{\alpha\beta\mu}^{ac}\Lambda_\gamma^\mu + T_{\alpha\mu\gamma}^{cb}\Lambda_\beta^\mu)\omega_c &\equiv 0. \end{aligned}$$

Мы видим, что в дифференциальные сравнения помимо самих компонент объекта T входят компоненты фундаментального объекта 1-го порядка Λ и оснащающего квазитензора λ (ср. [3]). Таким образом, T является псевдотензором, его обращение в нуль инвариантно. Другими словами, равенства $T_{\alpha\beta}^{abc} = 0$, $T_{\alpha\beta\gamma}^{abc} = 0$, $T_{\alpha\beta\gamma}^{ab} = 0$ инвариантны. В этом случае дифференциальные уравнения $\nabla\lambda^a = 0$, $\nabla\lambda_\alpha^a = 0$, $\nabla\lambda_\alpha = 0$ вполне интегрируемы и задают абсолютные параллельные перенесения аналога плоскости Картана C_{n-m-1} . ■

Литература

1. Белова О.О. Дифференциальная геометрия $(n-m)t$ -комплексов в n -мерном проективном пространстве // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 2023, Т. 220. С. 17–27.
2. Близникас В.И. Некоторые вопросы геометрии гиперкомплексов прямых // Тр. геом. семина. 1974. Т. 6. С. 43–111.
3. Belova O.O. Tensor of nonabsolute displacements on Grassman-like manifold of centered planes // J. Math. Sci. Springer New York. 2011. Vol. 177. № 5. P. 647–648; перевод из ФПМ. 2010. Т. 16. Вып. 2. С. 3–5.

Дата поступления в оргкомитет: 28.07.2025

О ВНЕШНЕЙ ГЕОМЕТРИИ R -ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И.И. Бодренко

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: irina@bodrenko.org, SPIN-код: 3941-0075

ООО «Интерактивные системы», Волгоград, Россия

Аннотация. В настоящей работе изучаются свойства кручения Ван дер Вардена-Бортолотти $2n$ -мерных комплексно-аналитических поверхностей в $(2n + 2)$ -мерных евклидовых пространствах.

Ключевые слова: Комплексно-аналитическая поверхность, евклидово пространство, связность Ван дер Вардена — Бортолотти, внешняя геометрия.

1. Введение

Пусть E^{2n+2} — $(2n + 2)$ -мерное евклидово пространство с декартовыми прямоугольными координатами $(x^1, x^2, \dots, x^{2n}, x^{2n+1}, x^{2n+2})$, $n \geq 1$, $<, >$ — скалярное произведение в E^{2n+2} .

Рассмотрим комплексно-аналитическую поверхность F^{2n} размерности $2n$ в E^{2n+2} , заданную в окрестности каждой своей точки $x \in F^{2n}$ векторным уравнением

$$\vec{r}(u) = \{u^1, u^2, \dots, u^{2n}, \varphi(u^1, u^2, \dots, u^{2n}), \psi(u^1, u^2, \dots, u^{2n})\}, \quad (1)$$

$u = (u^1, u^2, \dots, u^{2n}) \in U$, $u_0 = (u^1(x), u^2(x), \dots, u^{2n}(x))$, где U — некоторая область параметрического пространства $(u^1, u^2, \dots, u^{2n})$, функции $\varphi(u^1, u^2, \dots, u^{2n})$, $\psi(u^1, u^2, \dots, u^{2n})$ по переменным u^{2i-1}, u^{2i} , $i = \overline{1, n}$, удовлетворяют уравнениям Коши — Римана.

Поверхности $F^{2n} \subset E^{2n+2}$, заданные уравнением (1), следуя работе [1], кратко назовем R -поверхностями.

Пусть $x \in F^{2n}$ — произвольная точка, $T_x F^{2n}$ — касательное пространство к F^{2n} в точке x . Обозначим через $\vec{k}_N(x, \vec{t})$ и $\vec{\mathcal{K}}_N(x, \vec{t})$ векторы нормальной кривизны и нормального кручения поверхности $F^{2n} \subset E^{2n+2}$ в точке $x \in F^{2n}$ по направлению $\vec{t} \in T_x F^{2n}$ соответственно (см. [2]). Обозначим через $\vec{\mathcal{K}}_{\nabla}(x, \vec{t})$ вектор кручения Ван дер Вардена — Бортолотти поверхности $F^{2n} \subset E^{2n+2}$ в точке $x \in F^{2n}$ по направлению $\vec{t} \in T_x F^{2n}$ (см. [3]). В работе [3] установлены соотношения между векторами $\vec{k}_N(x, \vec{t})$, $\vec{\mathcal{K}}_N(x, \vec{t})$ и $\vec{\mathcal{K}}_{\nabla}(x, \vec{t})$ (см. [3, с. 70]).

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть F^{2n} — R -поверхность в E^{2n+2} , заданная уравнением (1) и не содержащая вырожденных точек. Тогда в каждой точке $x \in F^{2n}$ имеют место равенства

$$|\vec{\mathcal{K}}_{\nabla}(x, \vec{t}_{2i-1})| = |\vec{\mathcal{K}}_{\nabla}(x, \vec{t}_{2i})|, \quad i = \overline{1, n},$$

где $\vec{t}_j = \partial_j \vec{r}(u_0)$, $j = \overline{1, 2n}$.

2. Основные обозначения и леммы

Рассмотрим на R -поверхности, заданной уравнением (1), ортонормированное регулярное оснащение $\{\vec{n}_{\sigma|j}\}_1^2$, заданное формулами (см. [1, с. 23]):

$$\begin{aligned}\vec{n}_{1|} &= \frac{1}{\sqrt{p}} \{-\partial_1 \varphi, -\partial_2 \varphi, \dots, -\partial_{2n} \varphi, 1, 0\}, \\ \vec{n}_{2|} &= \frac{1}{\sqrt{p}} \{-\partial_1 \psi, -\partial_2 \psi, \dots, -\partial_{2n} \psi, 0, 1\},\end{aligned}$$

где $p = 1 + |\text{grad } \varphi|^2$.

Обозначим через $b_{\sigma|ij}$ коэффициенты второй квадратичной формы относительно нормали $\vec{n}_{\sigma|}$:

$$b_{\sigma|ij} = \langle \vec{n}_{\sigma|}, \partial_{ij}^2 \vec{r} \rangle, \quad i, j = \overline{1, 2n}, \quad \sigma = 1, 2.$$

Обозначим через $\Gamma_{\alpha\beta|i}^\perp$ коэффициенты линейной формы кручения:

$$\Gamma_{\alpha\beta|i}^\perp = \langle \vec{n}_{\alpha|}, \partial_i \vec{n}_{\beta|} \rangle, \quad i = \overline{1, 2n}, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Ковариантная производная второй фундаментальной формы b в связности Ван дер Вардена — Бортолотти $\bar{\nabla}$ вычисляется по формуле:

$$\bar{\nabla}_i b_{jk}^\alpha = \partial_i b_{jk}^\alpha - \Gamma_{ij}^l b_{lk}^\alpha - \Gamma_{ik}^l b_{jl}^\alpha + \Gamma_{\sigma|i}^\perp b_{jk}^\sigma,$$

где Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля, вычисленные относительно метрического тензора $g_{ij} = \langle \partial_i \vec{r}, \partial_j \vec{r} \rangle$, $b_{ij}^\alpha = \delta^{\alpha\beta} b_{\beta|ij}$, $\Gamma_{\sigma|i}^\perp = \delta^{\alpha\beta} \Gamma_{\beta\sigma|i}^\perp$, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, матрица $\|\delta^{\alpha\beta}\| = \|\delta_{\alpha\beta}\|^{-1}$, $i, j, k = \overline{1, 2n}$, $\alpha, \beta, \sigma = 1, 2$.

Обозначим

$$\bar{\nabla}_i \vec{b}_{jk} = \bar{\nabla}_i b_{jk}^1 \vec{n}_{1|} + \bar{\nabla}_i b_{jk}^2 \vec{n}_{2|}, \quad i, j, k = \overline{1, 2n}.$$

Лемма 1. На R -поверхности, заданной уравнением (1), имеют место равенства:

$$\Gamma_{2j-1, 2j-1}^k + \Gamma_{2j, 2j}^k = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, 2n}.$$

Доказательство. Мы имеем:

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kl} \Gamma_{ij, l}, \quad i, j, k, l = \overline{1, 2n},$$

где $\Gamma_{ij, l} = \langle \partial_{ij}^2 \vec{r}, \partial_l \vec{r} \rangle$, матрица $\|g^{kl}\| = \|g_{kl}\|^{-1}$.

Используя формулу (1), находим:

$$\partial_{2j-1, 2j-1}^2 \vec{r} + \partial_{2j, 2j}^2 \vec{r} = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Отсюда приходим к утверждению леммы. ■

Лемма 2. На R -поверхности, заданной уравнением (1), имеют место равенства:

$$\begin{aligned}b_{2j-1, 2j-1}^\sigma + b_{2j, 2j}^\sigma &= 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad \sigma = 1, 2, \\ b_{2j-1, k}^1 - b_{2j, k}^2 &= 0, \quad b_{2j, k}^1 + b_{2j-1, k}^2 = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, 2n}.\end{aligned}$$

Доказательство. Приходим к утверждению леммы непосредственными вычислениями с использованием формулы (1) и леммы 2 работы [1] (см. [1, с. 24]). ■

3. Доказательство теоремы

Учитывая уравнения Петерсона — Кодацци

$$\bar{\nabla}_i b_{jk}^\sigma = \bar{\nabla}_j b_{ik}^\sigma, \quad i, j, k = \overline{1, 2n}, \quad \sigma = 1, 2,$$

и используя леммы 1, 2, находим:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{2j-1} b_{2j-1, 2j-1}^1 + \bar{\nabla}_{2j-1} b_{2j, 2j}^1 &= 0, \quad \bar{\nabla}_{2j-1} b_{2j-1, 2j-1}^2 + \bar{\nabla}_{2j} b_{2j, 2j}^2 = 0, \\ \bar{\nabla}_{2j-1} b_{2j-1, 2j-1}^2 + \bar{\nabla}_{2j-1} b_{2j, 2j}^2 &= 0, \quad \bar{\nabla}_{2j-1} b_{2j-1, 2j-1}^1 - \bar{\nabla}_{2j} b_{2j, 2j}^1 = 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\bar{\nabla}_{2j-1} \vec{b}_{2j-1, 2j-1} = -\bar{\nabla}_{2j} b_{2j, 2j}^2 \vec{n}_{1|} + \bar{\nabla}_{2j} b_{2j, 2j}^1 \vec{n}_{2|}, \quad j = \overline{1, n},$$

при этом

$$\bar{\nabla}_{2j} \vec{b}_{2j, 2j} = \bar{\nabla}_{2j} b_{2j, 2j}^1 \vec{n}_{1|} + \bar{\nabla}_{2j} b_{2j, 2j}^2 \vec{n}_{2|}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{K}}_{\bar{\nabla}}(x, \vec{t}_{2i-1}) &= \frac{-\bar{\nabla}_{2i} b_{2i, 2i}^2 \vec{n}_{1|} + \bar{\nabla}_{2i} b_{2i, 2i}^1 \vec{n}_{2|}}{\sqrt{g_{2i-1, 2i-1}^3}}, \quad i = \overline{1, n}, \\ \vec{\mathcal{K}}_{\bar{\nabla}}(x, \vec{t}_{2i}) &= \frac{\bar{\nabla}_{2i} b_{2i, 2i}^1 \vec{n}_{1|} + \bar{\nabla}_{2i} b_{2i, 2i}^2 \vec{n}_{2|}}{\sqrt{g_{2i, 2i}^3}}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу формулы (1) выполнены равенства:

$$g_{2i-1, 2i-1} = g_{2i, 2i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, получим:

$$|\vec{\mathcal{K}}_{\bar{\nabla}}(x, \vec{t}_{2i-1})| = |\vec{\mathcal{K}}_{\bar{\nabla}}(x, \vec{t}_{2i})|, \quad i = \overline{1, n}.$$

Теорема доказана.

Литература

1. Зубков А.Н., Фоменко В.Т. О преобразованиях R -поверхностей евклидова пространства с сохранением их грассманова образа // Матем. заметки. 1989. Т. 45, N. 1. С. 20-27.
2. Бодренко И.И. О подмногообразиях с параллельным нормальным векторным полем в пространствах постоянной кривизны // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. Т. 169. С. 3-10.
3. Бодренко И.И. О кручении Ван дер Вардена — Бортолотти подмногообразий в пространствах постоянной кривизны // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики. Материалы VII Международной научной конференции. Нальчик, 2023. С. 69-71.

Дата поступления в оргкомитет: 07.09.2025

ГЕОМЕТРИЯ СПИНОРА И ЛИСТ МЁБИУСА

В.В. Варламов

д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@sibsiu.ru, SPIN-код: 6131-2702

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, Россия

Аннотация. Изучается связь геометрии спинора с геометрией гиперболической плоскости положительной кривизны, топология которой гомеоморфна листу Мёбиуса без его границы. Показывается, что известное свойство спинора возвращаться в исходное положение при вращении на угол 4π связано с движением плоской образующей абсолюта пространства Лобачевского.

Ключевые слова: спинор, гиперболическая плоскость, абсолют, лист Мёбиуса, изотропный флаг, пространство Лобачевского..

Известно следующее высказывание М. Атьи: «Никто до конца не понимает спиноры. Их алгебра формально понятна, но их геометрическое значение загадочно» [1, С. 430]. Однако в середине 50-х годов прошлого века Б.А. Розенфельдом был предложен очень интересный геометрический подход к описанию спиноров [2]. Суть этого подхода заключается в том, что координаты спиноров интерпретируются как координаты плоских образующих максимальной размерности абсолютов неевклидовых пространств. С другой стороны, известна геометрическая интерпретация Пенроуза [3], представляющая спинор как *изотропный флаг* (см. рис.2) Как извест-

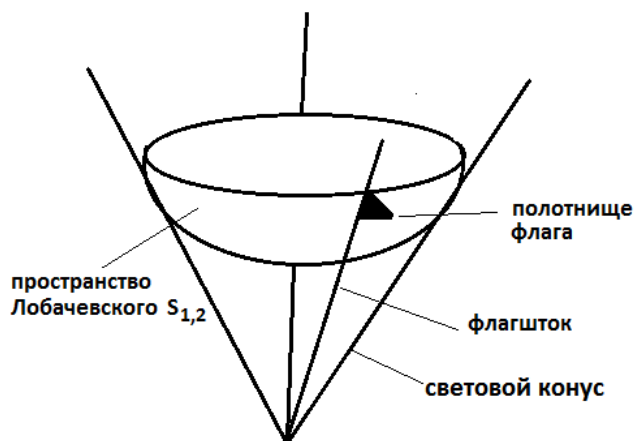


Рис. 1: Изотропный флаг Пенроуза.

но, движения пространства Лобачевского $S_{1,2}$, понимаемого как трёхмерная гиперсфера мнимого радиуса (двуполостной гиперболоид), задаются группой вращений

(группа Лоренца) пространства-времени $\mathbb{R}_{1,3}$, в котором нулевая квадрака задает световой конус. Пересечение на бесконечности верхней и нижней пол гиперболоида с нулевой квадрикой задает *абсолют* пространства $S_{1,2}$, который гомеоморфен расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C} \cup \infty$ («небесная сфера» у Пенроуза для верхней полу и, соответственно, «антинебесная сфера» для нижней полу). Движения пространства $S_{1,2}$ могут быть представлены преобразованием $H = A\Xi A^{-1}$, где A – элемент спинорной группы $\text{Spin}_+(1, 3)$, H и Ξ – линейные комбинации элементов алгебры Клиффорда $\mathcal{C}_{1,3}$, ассоциированной с пространством $\mathbb{R}_{1,3}$. В свою очередь, алгебра $\mathcal{C}_{1,3}$ допускает факторизацию $\mathcal{C}_{1,3} \simeq \mathcal{C}_{1,1} \otimes \mathcal{C}_{0,2}$, где $\mathcal{C}_{0,2} \simeq \mathbb{H}$ – алгебра кватернионов, $\mathcal{C}_{1,1}$ – алгебра с вещественным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$, тип $p-q \equiv 0 \pmod{8}$. В силу данной факторизации произвольный элемент $A \sim \Xi$ алгебры $\mathcal{C}_{1,3}$ может быть записан в виде

$$\mathcal{A}_{\mathcal{C}_{1,3}} = \mathcal{C}_{1,1}^0 e_0 + \mathcal{C}_{1,1}^1 \phi + \mathcal{C}_{1,1}^2 \psi + \mathcal{C}_{1,1}^3 \phi\psi,$$

где $\phi = e_{123}$, $\psi = e_{124}$, $\phi^2 = \psi^2 = (\phi\psi)^2 = -1$, следовательно $\phi \sim i$, $\psi \sim j$, $\phi\psi \sim k$ – кватернионные единицы. При этом ϕ и ψ коммутируют со всеми базисными элементами алгебры $\mathcal{C}_{1,1}$. Определим матричные представления кватернионных единиц ϕ и ψ следующим образом: $\phi \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\psi \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Тогда (см. [4])

$$\Xi \simeq \text{Mat}_2(\mathcal{C}_{1,1}) = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{1,1}^0 - i\mathcal{C}_{1,1}^3 & -\mathcal{C}_{1,1}^1 + i\mathcal{C}_{1,1}^2 \\ \mathcal{C}_{1,1}^1 + i\mathcal{C}_{1,1}^2 & \mathcal{C}_{1,1}^0 + i\mathcal{C}_{1,1}^3 \end{bmatrix}.$$

Далее решение системы уравнений $b = \Xi a = 0$ на световом конусе с использованием тождеств Липшица определяет точку на абсолют пространства $S_{1,2}$. Отсюда следует, что каждой точке абсолюта пространства $S_{1,2}$ соответствует изотропная прямая пространства $\mathbb{R}_{1,3}$, проходящая через некоторую точку этого пространства.

Точки пространства $S_{1,2}$, как собственные, так и *бесконечно удалённые* и идеальные, можно представить произвольными векторами пространства $\mathbb{R}_{1,3}$, направленными по прямым связки, соответствующим этим точкам [2]. Эти векторы удовлетворяют условию $(x, x) = 0$ для точек абсолюта пространства $S_{1,2}$. Изотропные прямые связки образуют световой конус пространства $\mathbb{R}_{1,3}$. Следовательно, изотропный вектор, направленный по изотропной прямой связки есть флашток изотропного флага согласно интерпретации Пенроуза. Точка, в которой флашток пересекает небесную (антинебесную) сферу, есть точка абсолюта пространства $S_{1,2}$. В плоском сечении, показанном на рис. 2, абсолют разделяет плоскость на две области с различной геометрией: внутри абсолюта находится L_2 – гиперболическая плоскость отрицательной кривизны, вне абсолюта, H_2 – гиперболическая плоскость положительной кривизны. Гиперболическая плоскость H_2 положительной кривизны *гомеоморфна листу Мёбиуса без его границы* [2, 5]. Полотнище флага (пространственноподобный вектор согласно Пенроузу [3]) принадлежит плоскости H_2 . В данном случае полотнище флага есть плоская образующая абсолюта пространства $S_{1,2}$, т.е. прямая линия. Соответственно, при движении флаштока (изотропного вектора)

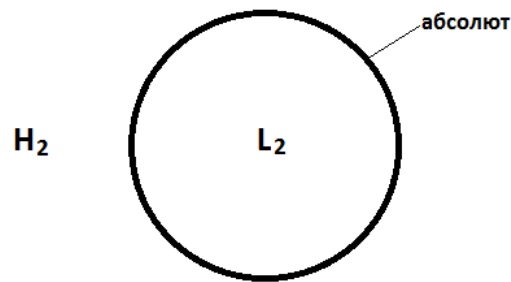


Рис. 2: Гиперболическая плоскость в интерпретации Кэли-Клейна.

вокруг светового конуса, что соответствует движению точки на абсолюте, полотнище флага в силу топологии листа Мёбиуса возвращается в исходное положение при вращении флагштока на 720° .

Предложенная геометрическая интерпретация спинора показывает, что *спинор связан с бесконечностью*, т.е. с бесконечно удалёнными точками абсолюта и идеальными точками пространства Лобачевского, что в некотором смысле оправдывает «загадочность» спинора согласно Атье, поскольку в данном случае бесконечность понимается *актуально* (по Кантору).

Литература

1. Farmelo G. The Strangest Man: The Hidden Life of Poul Dirac, Quantum Genius. New York: Basic Books, 2009.
2. Розенфельд Б.А. Неевклидовы геометрии. М.: ГИТТЛ, 1955.
3. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля. М.: Мир, 1987.
4. Varlamov V.V. Rozenfeld's Geometric Approach to Spinors. 2025. arXiv:2503.00017 [math-ph].
5. Ромакина Л.И. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2013.

Дата поступления в оргкомитет: 14.08.2025

СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЙ

В.В. Казак

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: Vkazak136@gmail.com

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

Аннотация. Устанавливается квазикорректность смешанного краевого условия при бесконечно малых изгибаниях.

Ключевые слова: бесконечно малые изгибания.

При исследовании изгибаний и бесконечно малых изгибаний поверхностей с краем на поведение поверхности при деформации ставятся какие-либо краевые условия. Обычно эти условия состоят или в ограничениях на способ изменения пространственного расположения края (кинематические связи) или же на характер изменения каких-либо геометрических характеристик поверхности вдоль края. Наиболее общей кинематической связью является связь, определяющая при бесконечно малом изгибании поверхности зависимость между смещением точек края и поворотом касательных плоскостей поверхности вдоль края:

$$R(\bar{U}, \bar{V}) = a(\bar{U}\bar{l}) + b(\bar{V}\bar{L}) = c \quad (1)$$

где $\bar{U}, \bar{V}$ – векторные поля соответственно смещения и вращения бесконечно малого изгибания поверхности, R – аддитивный оператор, a, b, c – действительные функции, заданные на границе ∂S поверхности S , $\bar{l}$ и $\bar{L}$ – некоторые векторные поля.

При $b = 0$ связь (1) даёт условие обобщённого скольжения, а при $a = 0$ – условие обобщённого поворота.

Граничное условие (1) называется **казикорректным с p степенями свободы** если однородное условие ($c = 0$) совместимо с p линейно независимыми бесконечно малыми изгибаниями поверхности S , а неоднородное условие совместимо с бесконечно малыми изгибаниями для любой функции c .

Изучение этого краевого условия при различных a и β приводит к следующим краевым задачам:

$$\begin{cases} w_{\bar{z}} + B\bar{w} = 0, & z \in D, \\ \operatorname{Re}\{a(t)w_t + \varepsilon b(t)w\} = \sigma, & t \in \partial D \end{cases} \quad (2)$$

Доказывается, что краевое условие $\operatorname{Re}\{a_1(t)w_t + \varepsilon b_1(t)w\} = \sigma$ является казикорректным с $2n + 3$ степенями свободы при $n = \operatorname{Ind} a_1 \geq 0$ для всех значений

$\varepsilon \in (-\infty; +\infty)$, за исключением, быть может, счётного множества $\varepsilon_k, k = 1, 2, 3, \dots$. Для поверхностей Дарбу эта задача принимает вид

$$\begin{cases} w_{\bar{z}} = 0, & z \in D, \\ \operatorname{Re}\{\overline{a(t)}w_t + \varepsilon\overline{b(t)}w\} = \sigma, & t \in \partial D, \end{cases} \quad (3)$$

Данные задачи сводятся к системе интегральных уравнений, которую можно записать в виде $\hat{U} = \varepsilon T\hat{U} + \sigma$. Исследование этой системы позволяет судить о характере жёсткости поверхности, подчинённой на краю смешанному краевому условию (1).

Литература

1. Фоменко В.Т. О квазикорректности внешних связей в теории бесконечно малых изгибов // СМЖ. 1974. Т. XV, № 1. С. 152–161.
2. Виноградов В.С. Об одном виде решения задачи Пуанкаре для аналитических функций // Доклады Академии Наук СССР. 1960. С. 17–19.
3. Казак В.В., Солохин Н.Н. О квазикорректности смешанного краевого условия для одного класса поверхностей // Современные проблемы математики и механики. Т. VI, вып. 2. Издательство Московского университета, 2011. С. 212–216.

Дата поступления в оргкомитет: 06.09.2025

О ГЛАДКОСТИ НОРМАЛИ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ КЛАССА C^1

Д.С. Климентов

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: dklimentov75@gmail.com

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

Аннотация. В предлагаемой заметке доказывается существование частных производных вектора нормали поверхности положительной кривизны класса C^1 почти наверное. Показывается, что существуют частные производные вектора нормали в точках, через которые проходят траектории канонического броуновского движения

Ключевые слова: Поверхность, уравнения Вейнгартена, вторая производная Ито по направлению, броуновское движение.

Пусть S — поверхность положительной кривизны класса C^1 в пространстве E^3 . Введём следующие обозначения: параметризация поверхности $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2)$, $\vec{n}$ — нормаль к поверхности S , D — область изменения параметров (x^1, x^2) , $B_t = (B_t^1, B_t^2)$ — каноническое броуновское движение на D . Не ограничивая общности, будем считать, что вторая основная форма поверхности S приведена к изотермическому виду: $II = \mu(dx^{1^2} + dx^{2^2})$. Подробно о введении второй основной формы поверхности на поверхности класса C^1 можно посмотреть в [1], [2].

На поверхности S имеет место формула Ито [3, с. 73]:

$$df(Z_t) = \partial_i f(Z_t) dZ_t^i + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j f(Z_t) dZ_t^i dZ_t^j, \quad (1)$$

где d — стохастический дифференциал, f — дважды дифференцируемая функция, Z_t — диффузионный процесс на S . Необходимо отметить, что мы рассматриваем диффузионный процесс с нулевыми сносом и вероятностью обрыва. Возьмём вместо случайного процесса Z_t каноническое броуновское движение $B_t = (B_t^1, B_t^2)$ (которое совпадает с процессом X_t , порождённым евклидовой метрикой в E^2) [4]

$$df(B_t) = \partial_i f(B_t) dB_t^i + \frac{1}{2} [\partial_{11} f(B_t) dt + \partial_{22} f(B_t) dt]. \quad (2)$$

Здесь мы воспользовались свойством броуновского движения $dB^i dB^j = \delta^{ij} dt$ [4, с.21]. В качестве процесса Z_t рассмотрим две диффузии: $Z_1 = (B_t^1, v)$ и (u, B_t^2) .

Второй производной Ито вдоль траектории броуновского движения B^1 (B^2) назовём

$$\partial_{11I} f(Z_1) dt = 2 (df(Z_1) - \partial_1 f(Z_1) dB_t^1), \quad (3)$$

$$\partial_{22I} f(Z_2) dt = 2 (df(Z_2) - \partial_1 f(Z_2) dB_t^2). \quad (4)$$

В дальнейшем, вторую производную Ито вдоль соответствующей траектории будем обозначать $f_{11;I_1}$ вдоль траектории B_1 и $f_{22;I_2}$ вдоль траектории B_2 .

Пусть последовательность достаточно гладких поверхностей $S^{(n)}$ сходится в метрике C^1 к поверхности S . Вторую основную форму поверхности S мы формально определим с помощью второй производной Ито. Можно показать, что коэффициенты вторых форм $\mu^{(n)}$ аппроксимирующих поверхностей $S^{(n)}$ сходятся к коэффициенту μ второй формы поверхности S .

Имеет место

Теорема 1. На поверхности S имеет место соотношение

$$\vec{n}_1^{(k)} \rightarrow \vec{n}_1 \quad (5)$$

на траекториях (B^1, v) и

$$\vec{n}_2^{(k)} \rightarrow \vec{n}_2 \quad (6)$$

на траекториях (u, B^2) .

Доказательство. Идея доказательства базируется на рассмотрении уравнений Вейнгартена

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= \frac{g_{12}b_{12} - g_{22}b_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \vec{r}_1 + \frac{g_{12}b_{11} - g_{12}b_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \vec{r}_2, \\ \vec{n}_2 &= \frac{g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \vec{r}_1 + \frac{g_{12}b_{12} - g_{11}b_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \vec{r}_2. \end{aligned}$$

Можно показать, что правая часть первого уравнения сходится к формально выписанной правой части уравнения Вейнгартена для поверхности S .

Далее, непосредственный подсчет по определению частной производной $\vec{n}_1$ дает её существование на траекториях процесса (B_t^1, v) .

Аналогично можно показать существование частной производной $\vec{n}_2$ на траекториях случайного процесса (u, B_t^2) .

Из свойств броуновского движения известно [5], что траектории броуновского движения всюду плотны в D . ■

Литература

1. Klimentov D.S. Stochastic differential geometry of smooth surfaces with positive curvature // Applied Mathematics and Physics. 2023. V. 55. No. 3. P. 220–227.
2. Климентов Д.С. Стохастический аналог деривационных уравнений Вейнгартена // Теория вероятностей и ее применения. 2024. Т. 69, Вып. 4. С. 810–811.
3. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986.
4. Анулова С.В., Веретенников А.Ю., Крылов Н.В., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Стохастическое исчисление. Итоги науки и техники. Серия фундамент. пробл. мат. Фундамент. направления. 1989. Т. 45. С. 5–253.
5. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1963.

Дата поступления в оргкомитет: 16.08.2025

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАГЕРРА, ТЕОРЕМЫ ТИПА КЕЙСИ И ПОВЕРХНОСТИ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

А.В. Костин

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: kostin_andrei@mail.ru, SPIN-код: 4516-3690

Казанский федеральный университет, Набережночелнинский институт

Набережные Челны, Россия

Аннотация. В работе рассматриваются взаимосвязи между теоремой Кейси и её аналогами и обобщениями в двумерных пространствах постоянной кривизны. Наряду с теоремами типа Кейси рассматриваются преобразования, сохраняющие соотношения такого рода. С помощью изотропной проекции можно установить взаимосвязи как между теоремами типа Кейси, так и между эквилонгальными преобразованиями в пространствах постоянной кривизны.

Ключевые слова: Теорема Кейси, плоскость Лобачевского, псевдоевклидово пространство, эквилонгальное преобразование.

1. Теоремы типа Кейси

В теореме Кейси рассматривается конфигурация из четырёх окружностей, касающихся одной (основной) окружности [1]. Для длин отрезков общих касательных пар окружностей в этой конфигурации выполняется такое же соотношение, как в теореме Птолемея для длин сторон и диагоналей вписанного четырёхугольника. Многомерное евклидово обобщение теоремы Кейси получено Н.В. Абросимовым и В.В. Асеевым [2]. Гиперболический аналог теоремы Кейси доказан Н.В. Абросимовым и Л.А. Михайловой в 2015 году [3]. Интерпретации евклидовой и гиперболической версий теоремы Кейси на изотропных сферах псевдоевклидова и псевдогиперболического пространств построены в работе [4]. Некоторые обобщения гиперболических аналогов теорем Птолемея и Кейси получены в работах [5,6]. На гиперболической плоскости в этих статьях кроме окружностей можно рассматривать также другие линии постоянной кривизны. В дополнение к общим геодезическим касательным двух линий постоянной кривизны можно брать орициклические касательные. При этом возникают наглядные взаимосвязи между евклидовыми и гиперболическими теоремами Кейси и их аналогами и обобщениями.

2. Орициклические аналоги теоремы Кейси

Определение 1. Орициклом на плоскости Лобачевского называется линия, ортогонально пересекающая пучок параллельных прямых. Бесконечно удалённый центр пучка называют (несобственным) центром орицикла.

В модели Пуанкаре в круге орициклы изображаются окружностями, касающимися окружности, служащей абсолютом плоскости Лобачевского. Для четырёх орициклов и общих касательных имеет место обобщение гиперболического аналога теоремы Кейси, в котором не требуется привязки орициклов к одной линии постоянной кривизны.

Теорема 1. Пусть даны четыре орицикла, несобственные центры A_1, A_2, A_3, A_4 которых в указанном порядке расположены на абсолюте плоскости Лобачевского (рис.2). Пусть t_{ij} – длина отрезка общей касательной орициклов с центрами A_i, A_j . Тогда имеет место равенство

$$\sinh \frac{t_{13}}{2} \cdot \sinh \frac{t_{24}}{2} = \sinh \frac{t_{12}}{2} \cdot \sinh \frac{t_{34}}{2} + \sinh \frac{t_{14}}{2} \cdot \sinh \frac{t_{23}}{2}.$$

Замечание 1. Если в условиях теоремы 1 орициклы не пересекаются, то заменив общие внешние геодезические касательные на внутренние и гиперболические синусы на гиперболические косинусы, получим ещё одно обобщение аналога теоремы Кейси.

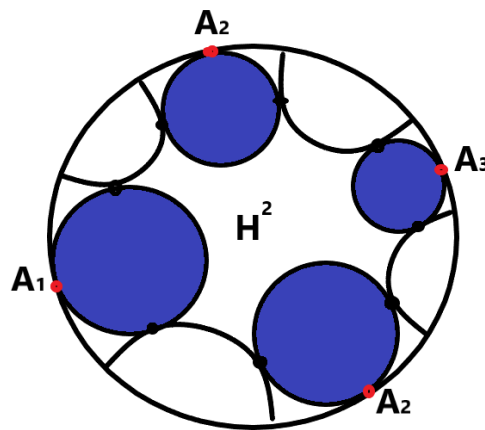


Рис. 1: Орициклы и касательные в модели Пуанкаре

Если вместо общих геодезических касательных для пар орициклов брать орициклические касательные, то в этом случае также имеем место своеобразный аналог теоремы Кейси.

Теорема 2. Пусть даны четыре орицикла, несобственные центры A_1, A_2, A_3, A_4 которых в указанном порядке расположены на абсолюте плоскости Лобачевского. Пусть t_{ij} – длина дуги орицикла, касающегося орициклов с центрами A_i, A_j . Тогда имеет место равенство

$$\frac{t_{13}}{2} \cdot \frac{t_{24}}{2} = \frac{t_{12}}{2} \cdot \frac{t_{34}}{2} + \frac{t_{14}}{2} \cdot \frac{t_{23}}{2}.$$

3. Эквилонгальные преобразования

Сопоставим евклидовой окружности вершину изотропного конуса трёхмерного псевдоевклидова пространства, высекающую эту окружность из плоскости Oxy (рис.2). Изотропная плоскость, касающаяся двух конусов, будет высекать из сферы мнимого радиуса орицикл плоскости Лобачевского. Семейства прямых плоскости Oxy , огибающих евклидовы окружности, будут соответствовать семействам орициклов, огибающих циклы плоскости Лобачевского. При этом длина дуги C_iC_j орицикла будет равна длинам отрезков S_iS_j и T_iT_j . Это позволяет установить взаимосвязи между преобразованиями Лагерра на евклидовой плоскости и их аналогами на плоскости Лобачевского, а также между теоремами Кейси и их орициклическими аналогами.

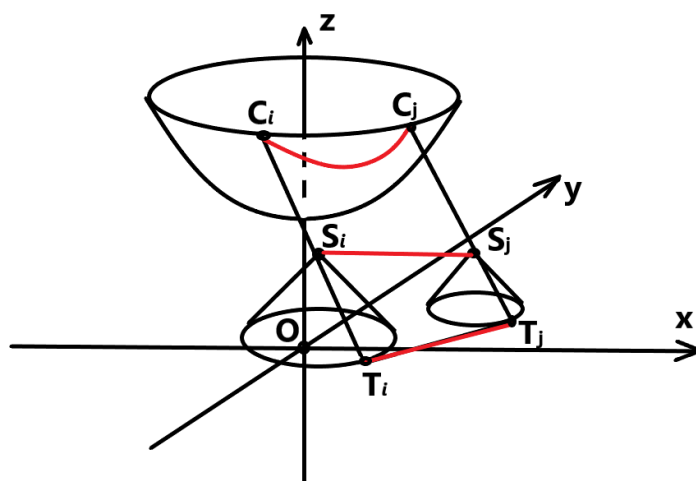


Рис. 2: Изотропная проекция

Литература

1. Maehara H., Martini H. Casey's Theorem / In: Circles, Spheres and Spherical Geometry. Birkhauser Advanced Texts Basler Lehrbucher: Birkhauser, Cham. 2024. P 261–277.
2. Abrosimov N.V., Aseev V.V. Generalizations of Casey's Theorem for Higher Dimensions // Lobachevskii J. Math. 2018. V. 39. P. 1–12.
3. Абросимов Н.В., Микайылова Л.А. Casey's theorem in hyperbolic geometry // Сибирские электр. матем. известия. 2015. Т. 12. С. 354–360.
4. Костин А.В., Костина Н.Н. Интерпретации теоремы Кези и её гиперболического аналога // Сибирские электр. матем. известия. 2016. Т. 13. С. 242–251.
5. Костин А.В. Об обобщениях теоремы Птолемея на плоскости Лобачевского // Сибирские электр.матем. известия. 2022. Т. 119. № 2. С. 404–414.
6. Kostin A.V. On Analogs of Fuhrmann's Theorem on the Lobachevsky Plane // Siberian Mathematical Journal. 2024. V. 65, № 3. P. 695–702.

Дата поступления в оргкомитет: 16.05.2025

О КОНТАКТНЫХ ЧИСЛАХ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

А.В. Костин¹

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: kostin_andrei@mail.ru, SPIN-код: 4516-3690

Н.Н. Костина²

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: natnikost@mail.ru, SPIN-код: 8123-5934

¹Казанский федеральный университет, Набережночелнинский институт,
Набережные Челны, Россия

²Казанский федеральный университет, Елабужский институт, Елабуга, Россия

Аннотация. В работе рассматриваются контактные числа и обобщённые контактные числа сфер в гиперболической геометрии. Задача о нахождении контактного числа сферы в гиперболическом пространстве связана с задачей Таммеса о нахождении максимального значения минимума расстояний между n точками на евклидовой единичной сфере. Кроме числа соседей первого уровня можно рассматривать число соседей больших уровней.

Ключевые слова: Контактное число сферы, задача Таммеса, гиперболическая геометрия.

Задача Таммеса и контактные числа. Задача о контактном числе сферы имеет давнюю историю. Точные значения контактных чисел в евклидовом пространстве известны в размерностях, не больших четырёх, а также в размерностях 8 и 24. Задача о контактном числе сферы в пространствах постоянной кривизны связана с задачей Таммеса о максимуме минимального расстояния между точками на евклидовой сфере [1]. По этому значению определяются граничные значения радиусов сфер в гиперболическом и сферическом пространствах, соответствующие данному значению контактного числа.

Контактное число 2-го порядка для сферы определяется как число сфер того же радиуса, касающихся либо самой сферы, либо сфер, касающихся её. Дальнейшим обобщением этого определения является контактное число k -го порядка. На гиперболической плоскости нетрудно найти оценки снизу для контактных чисел окружности в зависимости от радиуса этой окружности. Можно также дать оценки для числа равных сфер, касающихся одной сферы другого радиуса.

Литература

1. Kostin A.V., Kostina N.N. Tamme's Problem and Contact Number for Spheres in Spaces of Constant Curvature // J. Math. Sci. 2023. V. 277. P. 750–755.

Дата поступления в оргкомитет: 07.09.2025

ТЕОРИЯ УЗЛОВ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ И РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А.Д. Медных

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: smedn@mail.ru, SPIN-код: 9387-4204

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Аннотация. В докладе будет рассмотрена структура характеристических полиномов матрицы Лапласа для графов, обладающей циклической симметрией большого порядка. Будет показано, что в многих случаях, ответ дается в терминах полиномов Чебышева, степени которых совпадают с порядком симметрии. В качестве приложений будут приведены примеры вычислений групп гомологий циклических накрытий сферы, разветвленных над узлом, и подсчет числа остовных деревьев и отмеченных лесов для различных классов графов.

Ключевые слова: Узел, граф, группа гомологий, разветвленное накрытие, риманова поверхность.

В докладе содержится обзор результатов, полученных совместно с Лилией Грюнвальд, Ён Су Квоном, Ильёй Медных и Галиной Соколовой.

Пусть K — узел на трёхмерной сфере $\mathbb{S}^3$. Обозначим через M_n циклическое n -листное накрытие $\mathbb{S}^3$, разветвлённое над узлом K . Результаты, представленные в этой лекции, мотивированы классической теоремой испанского математика Антонио Планса (1953), которая утверждает, что

$$H_1(M_n, \mathbb{Z}) = A \oplus A, \text{ если } n \text{ — нечетно, и}$$

$$\text{Ker}(H_1(M_n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(M_2, \mathbb{Z})) = A \oplus A, \text{ если } n \text{ — четно.}$$

для подходящей абелевой группы A .

Цель доклада — дать конструктивное доказательство теоремы Планса для первой группы гомологий циклических накрытий узлов, а также для критической группы циклических разветвлённых накрытий графов.

Основные результаты доклада опубликованы в работе [1].

Литература

1. Медных А.Д., Медных И.А. и Соколова Г.К. Сопровождающая матрица суперпозиции полиномов и ее применение к теории узлов // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2025. Т. 521, С. 72–180.

Дата поступления в оргкомитет: 07.09.2025

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАКРЫТИЙ ГРАФОВ

И.А. Медных

к.ф.-м.н., e-mail: ilyamednykh@mail.ru, SPIN-код: 1303-3282

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Аннотация. Цель данного направления исследований – изучение инвариантов циклических накрытий графов. При этом, накрываемый граф предполагается фиксированным, а циклическая группа накрытия имеет сколь угодно большой порядок. Классическим примером таких накрытий являются циркулянтные графы. Они накрывают одновершинный граф с заданным числом петель. Более сложными представителями семейства циклических накрытий являются I -, Y -, H -графы, обобщенные графы Петерсена, сэндвич-графы, дискретные торы и многие другие. Доклад посвящен получению аналитических формул, позволяющих вычислять характеристические полиномы Лапласа. Знание такого полинома позволяет определять ряд основных спектральных инвариантов графов. Например, число отмеченных остовных лесов и деревьев, находить их асимптотическое поведение при стремлении числа вершин к бесконечности, и изучать арифметические свойства возникающих здесь числовых последовательностей. Основные формулы, а также их асимптотика эффективно выражаются через корни линейных комбинаций полиномов Чебышева.

Ключевые слова: Циркулянтный граф, накрытие графов, матрица Лапласа.

Пусть $n, s_1, s_2, \dots, s_k$ — целые числа, такие, что $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < \frac{n}{2}$. Граф $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ на n вершинах $0, 1, 2, \dots, n-1$ называется *циркулянтным*, если вершина $i, 0 \leq i \leq n-1$ смежна с вершинами $i \pm s_1, i \pm s_2, \dots, i \pm s_k \pmod{n}$. Все вершины графа имеют чётную степень $2k$. В докладе допускается пустой циркулянтный граф $C_n(\emptyset)$, состоящий из n изолированных вершин.

Пусть H — конечный граф с вершинами $v_1, v_2, \dots, v_m$, допускающий наличие кратных рёбер, но не имеющий петель. Обозначим через a_{ij} количество рёбер между вершинами v_i и v_j . Поскольку H не имеет петель, имеем $a_{ii} = 0$. Чтобы определить циркулянтное расслоение $H_n = H_n(G_1, G_2, \dots, G_m)$, каждой вершине v_i припишем циркулянтный граф $G_i = C_n(s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,k_i})$. В случае $G_i = C_n(\emptyset)$ положим $k_i = 0$. *Циркулянтное расслоение* $H_n = H_n(G_1, G_2, \dots, G_m)$ над графом H со слоями $G_1, G_2, \dots, G_m$ — это граф с множеством вершин $V(H_n) = \{(k, v_i) \mid k = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m\}$, где при фиксированном k вершины (k, v_i) и (k, v_j) соединены a_{ij} рёбрами, а при фиксированном i , вершины $(k, v_i), k = 1, 2, \dots, n$ образуют циркулянтный граф $C_n(s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,k_i})$. Каждая вершина (k, v_i) смежна с вершинами $(k \pm s_{i,1}, v_i), (k \pm s_{i,2}, v_i), \dots, (k \pm s_{i,k_i}, v_i) \pmod{n}$. Через d_i будем

обозначать валентность вершины i графа H . Будем называть H базовым графом для циркулянтного расслоения H_n .

Основной результат

Пусть $T_k(w) = \cos(k \arccos w)$ — полином Чебышёва первого рода. Введем матрицу

$$Q_\lambda(w) = \det \begin{pmatrix} \omega_1 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & \dots & -a_{1,m} \\ -a_{2,1} & \omega_2 & -a_{2,3} & \dots & -a_{2,m} \\ & \vdots & & & \vdots \\ -a_{m,1} & -a_{m,2} & -a_{m,3} & \dots & \omega_m \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\omega_i = 2k_i + d_i - \lambda - \sum_{j=1}^{k_i} 2T_{s_{i,j}}(w)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Основным результатом представленного сообщения является следующая теорема.

Теорема 1. Характеристический полином $\chi_n(\lambda) = \det(L - \lambda I)$ матрицы Лапласа $L = L(H_n)$ графа $H_n(G_1, G_2, \dots, G_m)$, с точностью до знака, вычисляется по формуле

$$\eta(\lambda)^n \prod_{p=1}^s (2T_n(w_p) - 2),$$

где $s = s_{1,k_1} + s_{2,k_2} + \dots + s_{m,k_m}$, w_p , $p = 1, 2, \dots, s$ — все корни уравнения $Q_\lambda(w) = 0$, а $\eta(\lambda)$ — это старший коэффициент полинома $Q_\lambda(w)$ по w .

Основные результаты доклада опубликованы в работах [1–3].

Литература

1. Медных А.Д., Медных И.А. Циклические накрытия графов. Перечисление отмеченных остовных лесов и деревьев, индекс Кирхгофа и якобианы // Успехи математических наук. 2023. Т. 78, № 3 (471). С. 115–164.
2. Кwon Й.С., Медных А.Д. и Медных И.А. О структуре характеристического полинома Лапласа для циркулянтных графов // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2025. Т. 515, С. 34–39.
3. Kwon Y.S., Mednykh A.D. and Mednykh I.A. On the structure of Laplacian characteristic polynomial for circulant foliation // Discrete Appl. Math. 2025. V. 375, No. 4. P. 338–349.

Дата поступления в оргкомитет: 07.09.2025

К ГИПОТЕЗЕ ЭЙЛЕРА О НЕИЗГИБАЕМОСТИ КОМПАКТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

И.Х. Сабитов

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: isabitov@mail.ru, SPIN-код: 6704-9956

Московский государственный университет, Москва, Россия

Аннотация. Предложено несколько подходов к доказательству гипотезы Эйлера утверждающей, что компактная без края поверхность не допускает деформации изгиба.

Ключевые слова: уравнение Бельтрами, интегральные формулы.

1. История вопроса

Гипотеза Эйлера, сформулированная им в 1770-х годах и опубликованная в первом томе его посмертных сочинений [1] под номером 97 по записям его ученика М.Е. Головина, утверждает, что компактная (т.е. ограниченная и без края) поверхность не допускает деформации изгиба. На самом деле у Эйлера нет такой четкой формулировки, так как в его время еще не было таких понятий, как компактность, непрерывность и изгибание. Такое понимание его предположения (даже будто бы и утверждения!) стало популярным, наверно, после появления статьи [2], в которой работе 97 из [1] приписывается именно такое толкование (хотя в той или иной формулировке этот вопрос наверняка должен был возникать у многих авторов еще в XIX веке, например, у Гаусса, Бонне, Петерсона и др.). У многих авторов эта проблема объявляется как одна из главных еще нерешенных задач геометрии «в целом», например, она сформулирована в 1982 г. в [3] как первая в списке открытых проблем во внешней геометрии подмногообразий (т.е. поверхностей), но нет упоминания при этом самой работы Эйлера.

Автор помнит, что в 1987 г. на конференции в Новосибирске в честь 75-летия А.Д. Александрова юбиляр начал свой доклад о нерешенных проблемах геометрии с постановки задачи о неизгибаемости в R^3 компактных поверхностей (правда, я не помню, ссылался ли он при этом на Эйлера). В работе [4] Ю.А. Аминов восторженно писал, что гипотеза Эйлера возвышается среди нерешенных проблем геометрии как гора Эверест среди гор Гималая. К настоящему времени гипотеза Эйлера доказана для выпуклых поверхностей в самой общей постановке (в смысле описания условий регулярности и содержания утверждения), а для остальных классов поверхностей есть только отдельные результаты, о которых можно прочитать, например, в [5] на сайте кафедры МГУ Дифференциальная геометрия и приложения. Во многих работах, в частности, и в [5], предлагается уточнить постановку задачи, обращая внимание на классы гладкости поверхности и ее рассматриваемых изометрических

деформаций. В нашем докладе мы хотим предложить несколько гипотетически возможных вариантов подходов к доказательству этой гипотезы.

2. Прямой подход

Он описан в работе [6]. Пусть радиус-вектор $\mathbf{r}$ исходной поверхности S и ее метрика ds^2 даны в изотермических координатах (u, v) :

$$\mathbf{r}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}, ds^2 = \lambda^2(u, v)(du^2 + dv^2), \quad (1)$$

а изгибания S^* поверхности S описаны поверхностями

$$\mathbf{r}^*(\xi, \eta) = \{x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)\} - h(\xi, \eta)\mathbf{n}(\xi, \eta), \quad (2)$$

где h — скалярная функция, $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к поверхности S (при достаточной близости S^* к S такое представление возможно). Тем самым процессу изгибания поверхности соответствует изометрическое отображение $w = w(\zeta)$ из окрестности ее точки $M^*(\xi, \eta)$ на S^* на соответствующую окрестность точки $M(u, v) \in S$. Вычислим метрику поверхности S^* в координатах (ξ, η) . Получим

$$ds^{*2}(\xi, \eta) = [\lambda^2(\xi, \eta) + 2hL + (2HL - K\lambda^2)h^2 + h^2\xi]d\xi^2 + \\ + 2(2hM + 2HMH^2 + h_\xi h_\eta)d\xi d\eta + [\lambda^2 + 2hL + (2HN - K\lambda^2)h^2 + h_\eta^2]d\eta^2, \quad (3)$$

где, как обычно, $H(\xi, \eta)$ и $K(\xi, \eta)$ — средняя и гауссова кривизны, а L, M, N — коэффициенты второй квадратичной формы исходной поверхности в точке (ξ, η) . С другой стороны, метрика ds^2 , вычисленная в координатах (u, v) , имеет вид как в (1), т.е. переход от координат (ξ, η) к координатам (u, v) совпадает с описанным в [7] переходом положительно определенной квадратичной формы к ее каноническому виду. А этот переход от координат $w = u + iv$ к координатам $\zeta = \xi + i\eta$ задается решением уравнения Бельтрами

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}} = q(\zeta) \frac{\partial w}{\partial \zeta}, \quad (4)$$

где коэффициент q имеет довольно сложное выражение. Цель — получить такое представление метрики, чтобы можно было увидеть, что поверхность не изгибается. Пока предварительно получить такое представление удалось, но вычисления очень громоздкие и нужно еще их тщательно проверить.

3. Интегральные формулы

Классическим примером использования интегральной формулы для доказательства неизгибаемости (и даже однозначной определенности) замкнутой выпуклой поверхности является формула Герглотца. Для исследования неизгибаемости компактной поверхности в общем случае можно попытаться использовать различные

ее обобщения. В ходе анализа имеющихся вариантов мы пришли к выводу, что гипотезу Эйлера о невозможности изгибаний компактной поверхности нужно сформулировать как невозможность изгибания компактной поверхности в классе деформаций, **аналитических** относительно параметра деформации, так как тогда появляется возможность использовать теорему Н.В. Ефимова из его работы [8] о том, что если поверхность обладает жесткостью 1-го или 2-го порядка, то поверхность не допускает аналитических по параметру изгибаний, кроме движений.

Литература

1. Euleri L. Opera postuma. I. Petropoli, 1862. P. 494–496.
2. Gluck H. Almost all simply connected closed surfaces are rigid // Lecture Notes in Math. 1975. V. 438. P.225–240. (Русский перевод в сборнике «Математика», № 18. С. 148–163. М.: Мир, 1980.)
3. Yau Shing-Tung. Problem section of the seminar in differential geometry at Tokyo // Semin. differential geometry, Ann. Math. Stud. 1982. V. 102. P. 669–706.
4. Aminov Yu.A. New ideas in Differential Geometry of submanifolds. Kharkov: ACTA, 1998. 114 p.
5. Сабитов И.Х. К гипотезе Эйлера о неизгибаемости компактных поверхностей // Презентация доклада на семинаре кафедры «Дифференциальная геометрия и приложения» МГУ, 27 февраля 2023. URL: <http://dfgm.math.msu.su/chairsem.php>.
6. Сабитов И.Х. Квазиконформные отображения поверхности, порожденные ее изометрическими преобразованиями, и изгибания поверхности на себя // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1, № 1. С. 281–288.
7. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1959. 628 с. (Есть 2е издание 1988 г.)
8. Ефимов Н.В. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, № 2. С. 48–157.

Дата поступления в оргкомитет: 06.09.2025

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТЕЙНЕРА

Н.Ф. Богаченко

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: nfbogachenko@mail.ru, SPIN-код: 4626-7708

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В статье предложен алгоритм решения известной геометрической задачи Штейнера на основе механической модели с заменой ее компьютерным аналогом динамической системы материальных точек.

Ключевые слова: задача Штейнера, кратчайшая связывающая сеть, механические модели, компьютерный аналог, алгоритм.

Задачу Штейнера – это задача построения кратчайшей связывающей сети на плоскости. Кратчайшей связывающей сетью (КСС) для точек $a_1, a_2, \dots, a_n$, образующих множество M , называется дерево с вершинами в этих точках, имеющее минимальную длину, то есть наименьшую сумму длин ребер.

В общем случае под задачей Штейнера понимается следующая проблема [1]: Пусть M – фиксированное конечное множество точек плоскости. Необходимо описать все КСС, «затягивающие» множество M , то есть выбрать из всех плоских графов, множество вершин которых содержит M , сети наименьшей длины. Формулируя задачу в терминах евклидовой плоскости, требуется найти кратчайшую сеть прямолинейных отрезков, связывающих между собой заданное множество точек.

При механической аналогии дерево можно интерпретироваться как механическая система, потенциальная энергия которой равна сумме расстояний между смежными вершинами. Положение устойчивого равновесия такой механической системы соответствует дереву, имеющему относительно минимальную длину. В такой модели ребра дерева представляют собой упругие нити, натяжение которых не зависит от того, насколько они растянуты. Исходные вершины $a_1, a_2, \dots, a_n$ закреплены, а точки Штейнера могут свободно перемещаться. Устойчивое положение этих точек и есть относительно минимальное дерево Штейнера.

Заменим механические модели компьютерным аналогом динамической системы материальных точек, часть из которых жестко закреплена, а часть свободно перемещается. Положение устойчивого равновесия такой системы соответствует максимуму потенциальной энергии. На базе этой модели предлагается приближенный алгоритм построения условно минимального дерева Штейнера.

В основе алгоритма лежат известные свойства:

- 1) число ребер, исходящих из точки Штейнера, равно трем, образуя углы по 120° ;
- 2) все точки Штейнера лежат в выпуклой оболочке исходных вершин $a_1, a_2, \dots, a_n$;

3) число точек Штейнера $s \leq (n - 2)$ (равенство достигается тогда и только тогда, когда каждая исходная вершина a_i имеет ровно одно ребро)

В начальный момент времени внутри выпуклой оболочки исходных или граничных вершин $a_1, a_2, \dots, a_n$, которые являются неподвижными, случайным образом генерируется $s = (n - 2)$ точек Штейнера. Необходимо отметить, что задача построения выпуклой оболочки сама по себе является достаточно трудоемкой. На первом этапе разработки алгоритма представляется возможным ограничить область распределения точек Штейнера прямоугольником, объемлющим исходные вершины. Если предположить, что граничные точки образуют выпуклую оболочку или выделено необходимое подмножество этих вершин, то могут быть приемлемы следующие стратегии:

1. Добавочные вершины генерируются внутри окружности с центром в центре масс системы исходных вершин и радиуса, равного минимальному расстоянию от центра до граничных точек.

2. Выпуклый многогранник разбивается на треугольники с общей вершиной во вновь сгенерированной точке. Сумма площадей треугольников должна быть равна площади этого многогранника.

На каждой итерации изменение координат точек Штейнера происходит по следующему правилу: для текущей вершины определяется три ближайших «соседа», из которых граничными могут быть максимум две точки (при этом каждая граничная вершина выбирается в качестве «ближайшей» не более одного раза). Далее координаты точки Штейнера изменяются согласно формулам:

$$x_{sht} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y_{sht} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (1)$$

где m_1, m_2, m_3 – «массы», а $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ – координаты точек, соответствующих вершинам треугольника. Иными словами, точка Штейнера перемещается в центр масс системы, состоящей из трех ближайших вершин. Соединения точки Штейнера с этими вершинами образуют ребра графа, который строится на данной итерации. Критерием останова является стабилизация системы, то есть ее переход в состояние устойчивого равновесия.

Как показывают численные эксперименты, алгоритм наиболее эффективен в случае, когда исходные вершины «тяжелее» точек Штейнера. Величина разности «масс» неподвижных и свободно перемещающихся точек, при которой удастся найти условно минимальное дерево Штейнера, является настраиваемым параметром и зависит как от общего числа вершин, так и от начальной конфигурации исходных точек.

Изложенный вариант алгоритма может привести к потере связности получаемого графа. Одна из причин – «склейка» точек Штейнера. Кроме того, появляются вершины, имеющие более трех ребер. Решить последнюю проблему возможно путем формирования графа не последовательно («от треугольника к треугольнику»), а строя КСС (дерево минимальной длины) на полученных $2(n - 1)$ вершинах. Что касается вопроса связности, то один из вариантов решения – это обязательная принадлежность точки Штейнера найденному треугольнику. (В противном случае самая дальняя точка «блокируется» и вновь ищется три ближайших; если после перебора

всех точек допустимый треугольник не найден то происходит изменение координат текущей точки Штейнера согласно некоторому правилу. Но, как показывает вычислительный эксперимент, наиболее эффективна случайная смена координат.) К сожалению, эта интерпретация алгоритма также не защищена от появления так называемых «висячих» вершин или неприемлемых конфигураций.

Отслеживание всех недопустимых ситуаций приводит к обычным комбинаторным проблемам.

С другой стороны, на начальном этапе решения задачи, когда требуется определить геометрию вершин, приемлем исходный вариант алгоритма, трудоемкость которого значительно меньше.

Кроме того, предложенный алгоритм легко переносится на случай пространства, размерность которого больше двух, так как ребра искомого дерева по-прежнему являются геодезическими и степень каждой вершины не превосходит трех [1, с.57].

В связи с этим приближенное решение задачи Штейнера можно рассматривать как вариант начального распределения материальных точек для запуска гравитационного метода поиска экстремума функции [2]. Исходные вершины в задаче Штейнера будут представлять собой материальные точки, равномерно распределенные на границе области поиска и наделенные «массами», равными значению целевой функции F в данной точке пространства. Подвижные точки Штейнера могут наделаться постоянной «массой», которая заменяется на значение функции F только после стабилизации системы, либо изначально иметь переменные «массы», зависящие от F . Узлы результирующего дерева Штейнера представляют собой так называемую «взвешенную» аппроксимацию функции F , которая учитывает поведение целевой функции и представляется более эффективной. Действительно, при использовании гравитационных законов частицы смещаются в направлении центра масс либо системы в целом, либо подмножества ближайших соседей. Иными словами, система стремится максимизировать потенциальную энергию. Система частиц, представляющих собой вершины дерева Штейнера, также обладает максимальной потенциальной энергией, но при условии неподвижности граничных точек.

Литература

1. Иванов А.О., Тужилин А.А. Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Платона // Успехи математических наук. М.: Наука, 1992. Т. 47. В.2(284). С. 53–115.
2. Жихалкина Н.Ф. Модель гравитационного взаимодействия материальных точек переменной массы в задачах поиска экстремума функции. Дисс. на соиск. учен. степени канд. тех. наук. Омск: ОмГУ, 2000.

Дата поступления в оргкомитет: 07.09.2025

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ

В.В. Варламов

д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@sibsiu.ru, SPIN-код: 6131-2702

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, Россия

Аннотация. Периодическая система химических элементов определяется в рамках весовой диаграммы алгебры Ли группы вращений восьмимерного псевдоевклидова пространства нейтральной сигнатуры.

Ключевые слова: периодическая системы, алгебра Ли, весовая диаграмма, подалгебра Картана, спин.

Геометрия периодической системы определяется порядковой структурой квантовых чисел. Согласно теоретико-групповому описанию периодической системы [1] первые три квантовых числа n , l и m соответствуют собственным числам ν , λ и μ_λ генераторов $\mathbf{L}_{56}$, $\mathbf{L}_{12}$ и $\mathbf{L}_{34}$, образующих подалгебру Картана $\mathfrak{K}$ алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, 2)$ конформной группы $SO(4, 2)$. $\mathfrak{so}(4, 2)$ есть алгебра Ли третьего ранга, поэтому все корневые и весовые диаграммы этой алгебры являются трёхмерными системами. Для адекватного описания спина в рамках теоретико-групповой схемы требуется переход к алгебре Ли четвёртого ранга. Такой алгеброй является $\mathfrak{so}(4, 4)$ – алгебра Ли группы вращений $SO(4, 4)$ восьмимерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{4,4}$ [1]. В этом случае подалгебра Картана $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(4, 4)$ содержит четыре генератора $\mathbf{L}_{56}$, $\mathbf{L}_{12}$, $\mathbf{L}_{34}$ и $\mathbf{L}_{78}$. Четвёртый генератор $\mathbf{L}_{78}$, понимаемый как генератор спина, коммутирует со всеми 15-ю генераторами подалгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$. Как следствие, базис Картана-Вейля для алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$

$$\{\mathbf{L}_{12}, \mathbf{L}_{34}, \mathbf{L}_{56}, \mathbf{L}_{78}, {}^1\mathbf{K}_+, {}^1\mathbf{K}_-, {}^1\mathbf{J}_+, {}^1\mathbf{J}_-, {}^1\mathbf{T}_+, {}^1\mathbf{T}_-, {}^1\mathbf{S}_+, {}^1\mathbf{S}_-, {}^1\mathbf{P}_+, {}^1\mathbf{P}_-, {}^1\mathbf{Q}_+, {}^1\mathbf{Q}_-, {}^2\mathbf{K}_+, {}^2\mathbf{K}_-, {}^2\mathbf{J}_+, {}^2\mathbf{J}_-, {}^2\mathbf{T}_+, {}^2\mathbf{T}_-, {}^2\mathbf{S}_+, {}^2\mathbf{S}_-, {}^2\mathbf{P}_+, {}^2\mathbf{P}_-, {}^2\mathbf{Q}_+, {}^2\mathbf{Q}_-\}$$

расщепляется на два структурно идентичных базиса

$$\{{}^1\mathbf{K}_3, {}^1\mathbf{J}_3, {}^1\mathbf{T}_0, {}^1\mathbf{S}_0, {}^1\mathbf{P}_0, {}^1\mathbf{Q}_0, {}^1\mathbf{K}_+, {}^1\mathbf{K}_-, {}^1\mathbf{J}_+, {}^1\mathbf{J}_-, {}^1\mathbf{T}_+, {}^1\mathbf{T}_-, {}^1\mathbf{S}_+, {}^1\mathbf{S}_-, {}^1\mathbf{P}_+, {}^1\mathbf{P}_-, {}^1\mathbf{Q}_+, {}^1\mathbf{Q}_-\}, \quad (1)$$

$$\{{}^2\mathbf{K}_3, {}^2\mathbf{J}_3, {}^2\mathbf{T}_0, {}^2\mathbf{S}_0, {}^2\mathbf{P}_0, {}^2\mathbf{Q}_0, {}^2\mathbf{K}_+, {}^2\mathbf{K}_-, {}^2\mathbf{J}_+, {}^2\mathbf{J}_-, {}^2\mathbf{T}_+, {}^2\mathbf{T}_-, {}^2\mathbf{S}_+, {}^2\mathbf{S}_-, {}^2\mathbf{P}_+, {}^2\mathbf{P}_-, {}^2\mathbf{Q}_+, {}^2\mathbf{Q}_-\}, \quad (2)$$

каждый из которых приводит к весовой диаграмме подалгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$. На рис. 1 представлены две совмещённые трёхмерные проекции ($SO(4, 2)$ -башни) весовой

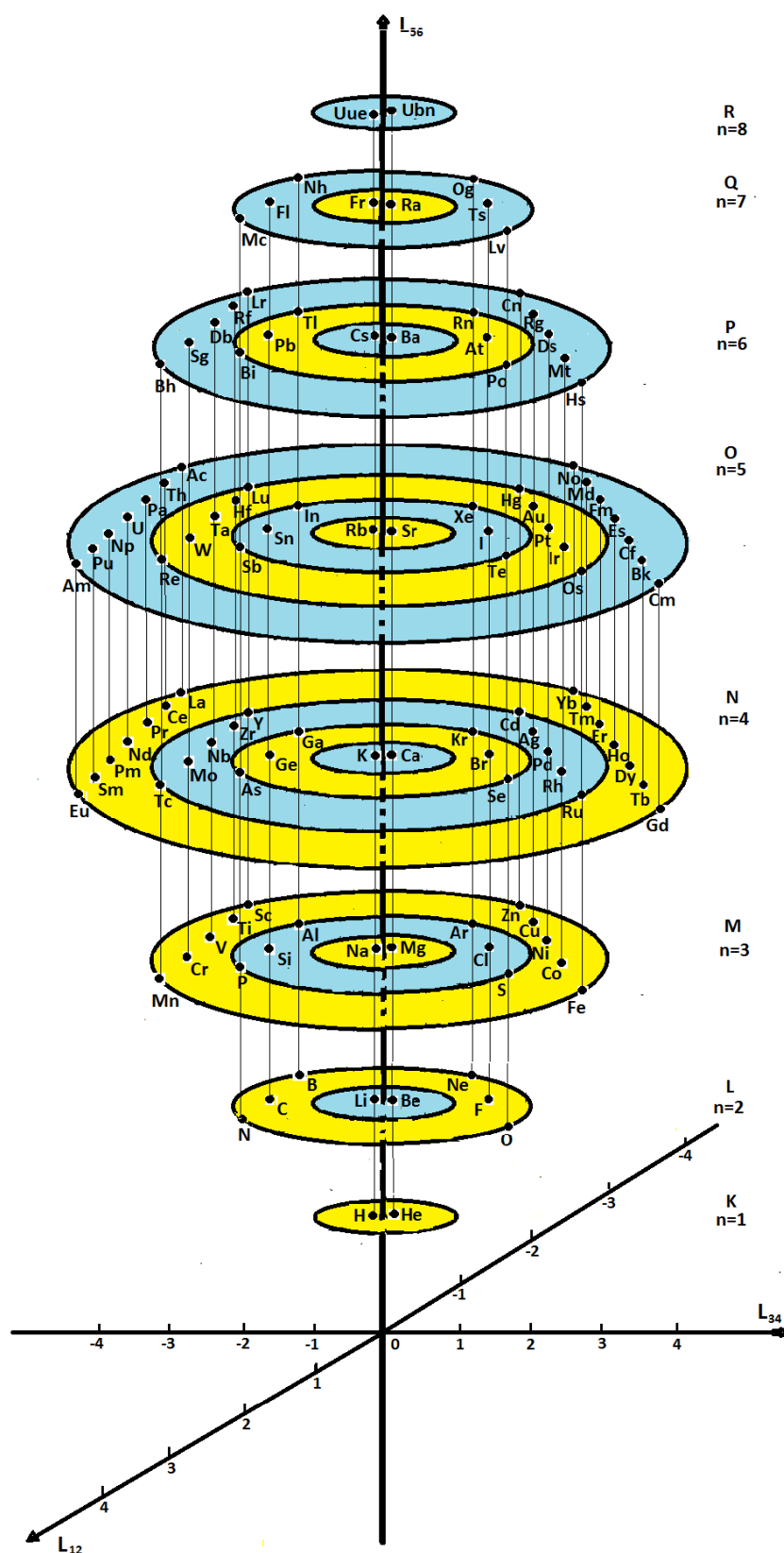


Рис. 1: Периодическая система химических элементов в форме совмещённой весовой диаграммы расщеплённых базисов (1) и (2) алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, 4)$.

диаграммы алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, 4)$ группы вращений $SO(4, 4)$, соответствующие базисам (1) и (2). Вертикальная ось $SO(4, 2)$ -башни образована собственными значениями генератора Картана $\Delta_3 = \mathbf{L}_{56}$, что добавляет к многообразию радиальный лестничный оператор. Каждый заданный этаж $SO(4, 2)$ -башни характеризуется главным квантовым числом n . Горизонтальные полосы (на этажах) соответствуют различным l -подоболочкам, а точки являются индивидуальными m -компонентами (конечномерными представлениями группы $SO(4, 2)$), задающими элементы периодической системы согласно правилу Маделунга. Жёлтым цветом обозначены кольца, содержащие элементы с нечётной суммой $n + l$, соответственно голубым цветом обозначены кольца с чётной суммой $n + l$ (удвоение периодов). Гомологичные элементы соединяются вертикальными линиями. На радиальной оси слева ($s = -1/2$) расположены щелочные металлы I группы (**Li**, **Na**, ...), соответственно справа ($s = +1/2$) радиальную ось населяют щелочноземельные металлы II группы (**Be**, **Mg**, ...). По мере удаления от радиальной оси к перифериям кругов Генцеля происходит уменьшение *металличности* элементов и нарастание *неметалличности*, этому соответствует движение слева направо по периоду в стандартной таблице Менделеева (металлы $\rightarrow$ амфотерные элементы $\rightarrow$ инертные газы).

Литература

1. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов VI.: Восьмимерное обобщение // Математические структуры и моделирование. 2025. № 2(74). С. 18–32.

Дата поступления в оргкомитет: 16.08.2025

ОПТИМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КОНСТАНТ В (q_1, q_2) -ОБОБЩЕННОМ НЕРАВЕНСТВЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ДЛЯ ВОХ-КВАЗИМЕТРИК ГРУПП КАРНО

А.В. Грешнов^{1,2}

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: a.greshnov@g.nsu.ru, SPIN-код: 6093-9948

¹Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

²Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Аннотация. Вводится понятие области $Q(X, \rho_X)$ допустимых параметров для (q_1, q_2) -квазиметрики ρ_X , определенной на множестве X . Формулируется задача об описании области допустимых параметров для ρ_X . Оптимальными в смысле Парето параметрами здесь являются некоторые подмножества граничных точек области $Q(X, \rho_X)$. Получены результаты об областях допустимых параметров для Вох-квазиметрик групп Гейзенберга и Энгеля.

Ключевые слова: (q_1, q_2) -квазиметрика, Вох-квазиметрика, допустимые параметры, оптимальность по Парето, группа Гейзенберга, группа Энгеля.

1. Введение

(q_1, q_2) -квазиметрическим пространством [1]–[3] называется пара (X, ρ_X) , где X – некоторое множество, содержащее не менее двух элементов, $\rho_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup 0$ — некоторая функция, удовлетворяющая аксиоме тождества $\rho_X(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (в этом случае говорят, что ρ_X – функция расстояния) и (q_1, q_2) -обобщенному неравенству треугольника, т. е. $\rho_X(x, y) \leq q_1 \rho_X(x, z) + q_2 \rho_X(z, y) \forall x, y, z \in X$, $q_1, q_2 > 0$. Несложно показать, что $q_1, q_2 \geq 1$. Если $q_1 = q_2 = 1$, тогда (X, ρ_X) – квазиметрическое пространство [4]. Если для (q_1, q_2) -квазиметрического пространства (X, d_X) выполняется условие обобщенной симметрии $\rho_X(x, y) \leq q_0 \rho_X(y, x) \forall x, y \in X$, где константа $q_0 \leq 1$ не зависит от выбора x, y , то (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, ρ_X) является q_0 -симметрическим; в случае $q_0 = 1$ используется понятие симметрического (q_1, q_2) -квазиметрического пространства. Метрическое пространство – это симметрическое $(1, 1)$ -квазиметрическое пространство. Нетривиальными примерами (q_1, q_2) -квазиметрических пространств являются пространства $(L_p(E), \rho_{L_p(E)})$, $\rho_{L_p(E)}(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|_p$, где $0 < p < 1$, E — измеримое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_p$ — стандартная норма пространства $L_p(E)$, и пространства Карно-Каратеодори M , снабженные Вох $_M$ -квазиметриками [5]–[8]. Концепция (q_1, q_2) -квазиметрических пространств была введена в работах А.В. Арутюнова и А.В. Грешнова (см. [1]–[3]). Для данной функции расстояния ρ_X рассмотрим совокупность всех пар (q'_1, q'_2) таких, что для ρ_X выполняется (q'_1, q'_2) -обобщенное неравенство треугольника. Множество $Q = Q(X, \rho_X)$ множество всех таких пар (q'_1, q'_2)

мы назовем *областью допустимых параметров* для (q_1, q_2) -квазиметрики ρ_X . Вообще говоря, для произвольной функции расстояния множество $Q(X, \rho_X)$ может оказаться и пустым. Таким образом, ρ_X является некоторой (q_1, q_2) -квазиметрикой тогда и только тогда, когда $Q(X, \rho_X) \neq \emptyset$. Говоря о том, что функция расстояния ρ_X является (q_1, q_2) -квазиметрикой, мы подразумеваем, что $Q(X, \rho_X) \neq \emptyset$, а (q_1, q_2) — некоторая точка из множества $Q(X, \rho_X)$. Введем обозначение $\mathbf{K} = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid q_1 \geq 1, q_2 \geq 1\}$; здесь мы рассматриваем $\mathbb{R}^2$ с евклидовой системой координат q_1, q_2 . Для любой точки $(q_1, q_2) \in \text{int } Q(X, \rho_X)$ выполняется $\rho_X(x, z) < q_1 \rho_X(x, y) + q_2 \rho_X(y, z) \forall x, y, z \in X$; при этом, если $(q_1, q_2) \in \partial Q(X, \rho_X)$, то найдутся точки $x, y, z \in Q(X, \rho_X)$ такие, что $\rho_X(x, z) = q_1 \rho_X(x, y) + q_2 \rho_X(y, z)$, см. [1]. Проводя через граничные точки замкнутого выпуклого множества Q опорные прямые, получаем, что у Q существуют крайние точки. Легко видеть, что каждая крайняя точка множества Q является **оптимальной** по Парето точкой множества Q (в смысле минимизации их компонент), но не наоборот [1]. Точка $(q_1^0, q_2^0) \in Q(X, \rho_X)$ называется **наилучшей**, если для всех $(q_1', q_2') \in Q(X, \rho_X)$ выполняется $q_i' \geq q_i^0, i = 1, 2$. Примеры (q_1, q_2) -квазиметрических пространств с наилучшими точками (q_1^0, q_2^0) такими, что $q_1^0 + q_2^0 > 2$, см. в [1, 5]. Группы Карно $\mathbb{G}$, снабженные Вох-квазиметриками $\text{Вох}_{\mathbb{G}}$, и более общие эквирегулярные пространства Карно—Каратеодори являются важными частными случаями симметрических $(1, q_2)$ -квазиметрических пространств [3]–[7]; более того, $q_2 \neq 1$ в общем случае [7]. Вох-квазиметрики были введены Найджелом, Стейном и Вэйнгером в работе [8] для получения оценок ядер некоторых неэллиптических дифференциальных операторов (типа сублапласиана), индуцированных векторными полями, удовлетворяющими условию Хермандера. Вох-квазиметрики и их свойства играют огромную роль в геометрическом анализе на пространствах Карно—Каратеодори и группах Карно. Проблема нахождения минимальных значений q_2 для Вох-квазиметрик, рассматриваемых как $(1, q_2)$ -квазиметрики, является актуальной задачей, см. [7, 9, 10]. В связи с этим естественным образом возникает вопрос об описании множеств $Q(\mathbb{G}, \text{Вох}_{\mathbb{G}})$. Для некоторых (q_1, q_2) -квазиметрик множества их допустимых параметров найдены в работах [1, 5].

2. Результаты

Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{R}^3$ со следующей групповой операцией

$$w \cdot w' = (x, y, t) \cdot (x', y', t') = \left(x + x', y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y) \right), \quad \alpha > 0.$$

Пару $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ назовем канонической первой группой Гейзенберга $\mathbb{H}_{\alpha}^1$ (см. [7]). Определим Вох-квазиметрику $\text{Вох}_{\mathbb{H}_{\alpha}^1}$ следующим образом. Пусть $u, v \in \mathbb{H}_{\alpha}^1$, тогда $v = (u \cdot u^{-1}) \cdot v = u \cdot (u^{-1} \cdot v) = uc$, где $c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{H}_{\alpha}^1$. Тогда $\text{Вох}_{\mathbb{H}_{\alpha}^1}(u, v) = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|^{\frac{1}{2}}\}$.

Теорема 1 ([11]). *Множество $\partial Q(\mathbb{H}_{\alpha}^1, \text{Вох}_{\mathbb{H}_{\alpha}^1})$ представляет собой: 1) $\partial \mathbf{K}$ в случае $\alpha \leq 2$; 2) объединение дуги ветви гиперболы $4q_1^2 + 4q_2^2 - 4q_1q_2\alpha + \alpha^2 - 4 = 0$, ограниченной точками $M_{q_1} = (1, \frac{\alpha}{2})$, $M_{q_2} = (\frac{\alpha}{2}, 1)$, и лучей, принадлежащих $\partial \mathbf{K}$, начинающихся в точках M_{q_1} , M_{q_2} при $\alpha > 2$.*

Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{R}^4$ со следующей групповой операцией $w \cdot$
 $w' = (x, y, t, z) \cdot (x', y', t', z')$

$$= \left(x + x', y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y), z + z' + \frac{\beta}{2}(xt' - x't) + \frac{\alpha\beta}{12}(x - x')(xy' - x'y) \right),$$

где $\alpha, \beta > 0$. Пару $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ назовем канонической группой Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha, \beta}$ (см. [7]). Определим Вох-квазиметрику $\text{Box}_{\mathbb{E}_{\alpha, \beta}}$ следующим образом. Пусть $u, v \in \mathbb{E}_{\alpha, \beta}$, тогда $v = (u \cdot u^{-1}) \cdot v = u \cdot (u^{-1} \cdot v) = uc$, где $c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{E}_{\alpha, \beta}$. Тогда $\text{Box}_{\mathbb{E}_{\alpha, \beta}}(u, v) = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|^{\frac{1}{2}}, |c_4|^{\frac{1}{3}}\}$. Введем в рассмотрение множество $Q_{\alpha, \beta} = \{(q_1, q_2) \mid 1 + a\varepsilon + a\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \leq (q_1 + \varepsilon q_2)^3, \varepsilon \geq 0\}$, $a = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha\beta}{6}$.

Теорема 2 ([12]). $Q(\mathbb{E}_{\alpha, \beta}, \rho_{\mathbb{E}_{\alpha, \beta}}) = \mathbf{K} \cap Q(\mathbb{H}_{\alpha}^1, \rho_{\mathbb{H}_{\alpha}^1}) \cap Q_{\alpha, \beta}$.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2025-349 от 29.04.2025.

Литература

1. Арутюнов А.В., А. В. Грешнов А.В. (q_1, q_2) -квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения // Изв. РАН. Математика. 2018. Т. 82, № 2. С. 3-32.
2. Арутюнов А.В., Грешнов А. В. Теория (q_1, q_2) -квазиметрических пространств и точки совпадения // Докл. РАН. 2016. Т. 469, № 5. С. 527–531.
3. Arutyunov A.V., Greshnov A.V. (q_1, q_2) -quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points. A review of the results // Fixed Point Theory. 2022. V. 23, № 2. P. 473–486.
4. Wilson W.A. On quasi-metric spaces // American J. of Math. 1931. V. 53. P. 675–684.
5. Greshnov A.V. (q_1, q_2) -quasimetrics bi-Lipschitz equivalent to 1-quasimetrics // Siberian Adv. Math. 2017. V. 27, No. 4. P. 253–262.
6. Vodopyanov S.K. Geometry of Carnot-Carathéodory spaces and differentiability of mapping // Contemporary Mathematics. 2007. V. 424. P. 247–301.
7. Greshnov A.V., Tryamkin M.V. Exact values of constants in the generalized triangle inequality for some $(1, q_2)$ -quasimetrics on canonical Carnot groups // Math. Notes, 2015. V. 98, No. 4. P. 694–698.
8. Nagel A., Stein E.M., Wainger S. Balls and metrics defined by vector fields. I // Acta Math. 1985. V. 155. No. 1–2. P. 103–147.
9. Greshnov A., Potapov V. About coincidence points theorems on 2-step Carnot groups with 1-dimensional centre equipped with Box-quasimetrics // AIMS Mathematics. 2023. V. 8, No. 3. P. 6191–6205.
10. Greshnov A.V. On finding the exact values of the constant in a $(1, q_2)$ - generalized triangle inequality for Box-quasimetrics on 2-step Carnot groups with 1-dimensional center // Сиб. электрон. матем. изв.. 2021. Т. 18, № 2. С. 1251–1260.
11. Грешнов А.В., Грешнова С.А. Области допустимых параметров Вох-квазиметрик канонических групп Гейзенберга и их обобщений // Матем. тр. 2024. Т. 27, № 4. С. 42–56.
12. Грешнов А.В., Грешнова С.А. Области допустимых параметров Вох-квазиметрики канонической группы Энгеля // Матем. тр. 2025. Т. 28, № 2. С. 50–61.

Дата поступления в оргкомитет: 30.08.2025

ГРАВИТАЦИОННОЕ ОТТАЛКИВАНИЕ И ГЕОМЕТРИЯ 3-МЕРНЫХ КРОТОВЫХ НОР, СОЕДИНЯЮЩИХ ТЯГОТЕЮЩИЕ ТЕЛА

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: aguts@mail.ru

Сочинский государственный университет, Сочи, Россия

Аннотация. В статье, опираясь на гипотезу $ER=EPR$ Малдасены и Заскинда, показано, что антигравитация связана с образованием особого (неориентированного) типа моста Эйнштейна-Розена, а гравитация с обычным (ориентированным) мостом Эйнштейна-Розена.

Ключевые слова: Антигравитация, запутанность, неориентированность, кротовые норы, гипотеза $ER=EPR$, неориентируемый мост Эйнштейна-Розена.

В статьях [1,2] было показано, что известные формулы Ньютона и Кулона

$$F_g = G \frac{Mm}{r^2} \quad \text{и} \quad F_e = k \frac{|Q||q|}{r^2}$$

можно записать в виде

$$F_g = G \frac{Mm}{\left\| \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{r}_M \otimes \vec{r}_m - \vec{r}_m \otimes \vec{r}_M) \right\|^2} \quad (1)$$

и

$$F_e = k \frac{|Q||q|}{\left\| \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{r}_Q \otimes \vec{r}_q - \vec{r}_q \otimes \vec{r}_Q) \right\|^2} \quad (2)$$

соответственно, поскольку

$$r^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \vec{r}_M \otimes \vec{r}_m - \vec{r}_m \otimes \vec{r}_M \right\|^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \vec{r}_Q \otimes \vec{r}_q - \vec{r}_q \otimes \vec{r}_Q \right\|^2.$$

Здесь $\vec{r}_M, \vec{r}_m$ (соотв.: $\vec{r}_Q, \vec{r}_q$) – радиус-векторы центров двух тяготеющих масс M и m (соотв.: зарядов Q и q) в векторном пространстве V^3 , а тензоры $\vec{r}_M \otimes \vec{r}_m, \vec{r}_m \otimes \vec{r}_M$ (соотв.: $\vec{r}_Q \otimes \vec{r}_q, \vec{r}_q \otimes \vec{r}_Q$) – элементы пространства $V^3 \otimes V^3$. В знаменателях формул (1), (2) стоит квадрат нормы пространства $V^3 \otimes V^3$ неразложимого (запутанного) элемента этого тензорного произведения векторных пространств.

В 2013 году физиками Хуаном Малдасеной и Леонардом Зюскиндом была выдвинута гипотеза **$ER=EPR$** , объявляющая эквивалентность двух фундаментальных (и казавшихся совершенно разными) концепций: 1) ER : Мост Эйнштейна-Розена, т.е.

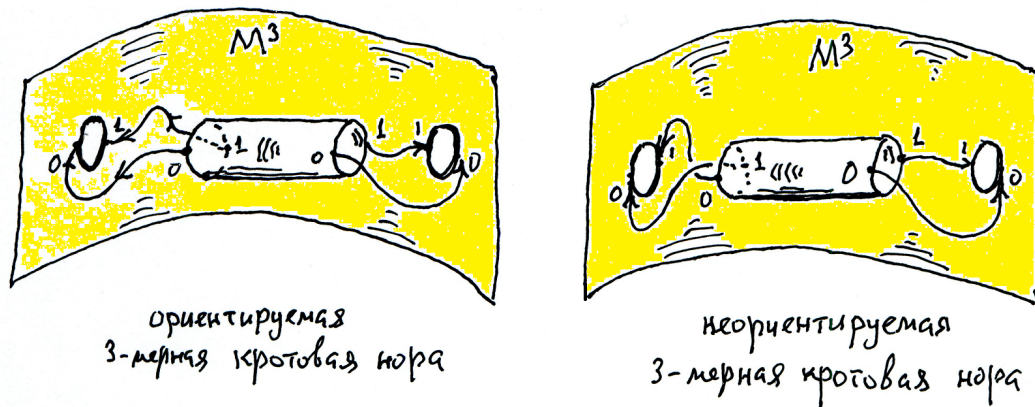


Рис. 1: Приклеивание 3-мерных кротовых нор (цилиндров) к риманову многообразию M^3 с двумя вырезанными шарами D^3 . На правом рисунке отождествление образовавшихся краев, гомеоморфных 2-мерной сфере S^2 , и краев 3-мерного цилиндра, происходит с отождествлением диаметрально противоположных точек (см. подробности в [3,4])

3-мерная кротовая нора, – это короткий туннель, соединяющий две удаленные пространственные области Вселенной, и, 2) **EPR**: Парадокс Эйнштейна-Подольского-Розена – явление квантовой запутанности.

Поскольку вышеприведенные формулы (1)-(2) говорят о квантовой запутанности тяготеющих тел или зарядов, то они соединяются 3-мерной кротовой норой. Спрашивается, почему наблюдается электрическое отталкивание, и практически не наблюдается гравитационное отталкивание?

Видимо, притяжение и отталкивание характеризуются разными типами кротовых нор. И этот тип связан с ориентацией кротовых нор. На рисунке мы показываем, какой может быть эта ориентация.

Неориентируемая кротовая нора порождается в случае одинаковых по знаку зарядов или в случае гравитационного отталкивания и требует гораздо большей энергии для своего формирования, чем в случае притяжения. Поскольку электрическое взаимодействие в 10^{42} сильнее, то у тяготеющих тел не хватает энергии для формирования неориентированной кротовой норы. Следовательно, антигравитация практически не наблюдается.

Литература

1. Гуц А.К. Гравитация как квантовая запутанность массивных тел // Математические структуры и моделирование. 2025. № 2 (74). С.33-37.
2. Гуц А.К. Гравитационное и электрическое взаимодействия как квантовая запутанность и их тензорные типы // Наукосфера. 2025. № 4 (1). С.268–272.
3. Гуц А.К. Модель образования ручки в 3-мерном римановом многообразии // Дни геометрии в Новосибирске, 2013. Тезисы международной конференции. - Новосибирск: Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН. 29 августа - 31 августа 2013 г. С.36-37.
4. Гуц А.К. Физика реальности. Омск: Изд-во КАН, 2012. – 424с.

Дата поступления в оргкомитет: 08.09.2025

О ЦЕПОЧКАХ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ГРУППАХ КАРНО

М.Б. Карманова^{1,2}

д.ф.-м.н., e-mail: maryka84@gmail.com, SPIN-код: 3371-8763

¹Новосибирский государственный университет

² Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Аннотация. Установлены формулы площади для цепочек отображений на группах Карно, являющихся обобщениями отображений-графиков.

Ключевые слова: группа Карно, композиция отображений, отображение-график, формула площади.

Доклад посвящен исследованию свойств обобщений отображений-графиков на двухступенчатых группах Карно, а также, некоторым тонким свойствам липшицевых графиков, построенных на таких группах. Связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$ называется *группой Карно*, если ее алгебра Ли V представима в виде $V = V_1 \oplus V_2$, $[V_1, V_1] = V_2$, $[V_1, V_2] = \{0\}$. Если базисное поле X_l принадлежит V_k , то его *степень* $\deg X_l$ равна k , $l = 1, \dots, N$, $k = 1, 2$. Здесь и далее N – топологическая размерность группы $\mathbb{G}$. Субриманово расстояние на $\mathbb{G}$ задается, как

$$d_2(v, w) = \max \left\{ \left(\sum_{j: \deg X_j=1} w_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{j: \deg X_j=2} w_j^2 \right)^{\frac{1}{4}} \right\},$$

где $w = \exp \left(\sum_{i=1}^N w_i X_i \right)(v)$, $v, w \in \mathbb{G}$. Очевидно, что оно не является билипшицево эквивалентным расстоянию, определяемому римановым тензором. Следовательно, отображения, являющиеся липшицевыми относительно d_2 , в общем случае гёльдеровы относительно римановых метрик.

Мы предполагаем, что $\tilde{\mathbb{G}}$, $\hat{\mathbb{G}}$ и $\mathbb{G}$ – двухступенчатые группы Карно, для которых выполняются следующие условия. Группы $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\hat{\mathbb{G}}$ с базисными полями $\{\tilde{X}_j\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ и $\{\hat{X}_j\}_{j=1}^{\hat{N}}$ соответственно являются подмножествами группы $\mathbb{G}$ топологической размерности $N = \tilde{N} + \hat{N}$. Кроме того, поля $\{X_i\}_{i=1}^N$ на $\mathbb{G}$ таковы, что, во-первых, $\dim V_k = \dim \tilde{V}_k + \dim \hat{V}_k$, $k = 1, 2$, и, во-вторых, $X_1|_{\tilde{\mathbb{G}}} = \tilde{X}_1, \dots, X_{\dim V_1}|_{\tilde{\mathbb{G}}} = \tilde{X}_{\dim \tilde{V}_1}$, $X_{\dim V_1+1}|_{\tilde{\mathbb{G}}} = \tilde{X}_{\dim \tilde{V}_1+1}, \dots, X_{\dim V_1+\dim \tilde{V}_2}|_{\tilde{\mathbb{G}}} = \tilde{X}_{\tilde{N}}$ и $X_{\dim \tilde{V}_1+1}|_{\hat{\mathbb{G}}} = \hat{X}_1, \dots, X_{\dim V_1}|_{\hat{\mathbb{G}}} = \hat{X}_{\dim \hat{V}_1}$, $X_{\dim V_1+\dim \tilde{V}_2+1}|_{\hat{\mathbb{G}}} = \hat{X}_{\dim \hat{V}_1+1}, \dots, X_N|_{\hat{\mathbb{G}}} = \hat{X}_{\hat{N}}$. Предположим также, что $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\hat{\mathbb{G}}$ пересекаются по своим единицам в единице 0 группы $\mathbb{G}$ (это всегда можно сделать посредством сдвигов).

Пусть еще $\mathcal{G}$ – некоторая двухступенчатая группа Карно топологический размерности $\mathcal{N}$ с алгеброй Ли $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$. Будем считать, что $\dim \mathcal{V}_1 \leq \dim V_1$ и $\dim \mathcal{V}_2 \leq \dim V_2$.

Для отображений $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ и $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \hat{\mathbb{G}}$, липшицевых относительно субримановых (т. е., построенных по аналогии с d_2) расстояний, где

$$\varphi(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \varphi_i(x) \tilde{X}_i\right)(0) \text{ и } \psi(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\hat{N}} \psi_j(x) \hat{X}_j\right)(0),$$

композиция ψ_φ отображений φ и ψ строится следующим образом:

$$\psi_\varphi(x) = \exp\left(\sum_{k=\dim \tilde{V}_1+1}^{\dim V_1} \psi_{k-\dim \tilde{V}_1}(x) X_k + \sum_{k=\dim V_1+\dim \tilde{V}_2+1}^N \psi_{k-\tilde{N}}(x) X_k\right)(\varphi(x)).$$

В частном случае, когда φ – тождественное отображение, мы получаем отображение-график ψ_Γ .

Известно (см. работы Р. Pansu и С.К. Водопьянова), что отображения, являющиеся липшицевыми относительно субримановых расстояний, являются субриманово дифференцируемыми почти всюду, то есть, локально аппроксимируются горизонтальным гомоморфизмом с точностью до величины $o(\cdot)$ относительно субримановых расстояний. При некоторых дополнительных ограничениях отображения субриманово дифференцируемы всюду, а субриманов дифференциал непрерывен.

Однако, ни отображения-графики, ни композиции ψ_φ в общем случае не являются липшицевыми ни в классическом, ни в субримановом смысле. Тем не менее, как установлено в работах автора, отображения-графики можно приблизить некоторым полиномом с точностью до величины $o(\cdot)$ относительно субримановых расстояний. Такой полином называется *полиномиальным субримановым дифференциалом*. В ходе доклада мы опишем аналог полиномиального субриманова дифференциала для композиций, а также, установим условия биективности композиций для описанных выше условий задачи. Отметим, что для отображений-графиков вопросы о его биективности решаются относительно легко, тогда как для композиций вида ψ_φ этот вопрос является специфическим.

Основной результат доклада – формула площади, где якобиан найден в явном виде в терминах субримановых дифференциалов φ и ψ . Также, в качестве иллюстрации к исследованию композиций и графиков, будут приведены примеры, когда график нелипшицевых отображений является липшицевым, а также, сформулирован критерий липшицевости графика на двухступенчатых группах Карно в терминах задающего этот график отображения. В качестве развития и приложения результата установлен явный вид субриманова дифференциала таких отображений-графиков, выведена формула площади, а также, установлены дифференциальные и метрические свойства задающих такие графики отображений.

Дата поступления в оргкомитет: 26.08.2025

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПОСЛОЙНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Е.Ю. Деревцов

д.ф.-м.н., г.н.с., e-mail: eydert@mail.ru, SPIN-код: 6372-6408

С.В. Мальцева

к.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: maltsevasv@math.nsc.ru, SPIN-код: 6712-2742

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Аннотация. Рассматривается задача интегральной геометрии в полупространстве с заданной изотермической римановой метрикой. Установлены вполне геодезические подмногообразия рассматриваемой римановой области. Предложен и обоснован подход к послойному решению задачи за счет понижения топологической размерности путем её сведения к решению серии двумерных задач. Построена 2D метрика в круге, изометричная соответствующему вполне геодезическому подмногообразию исходной 3D многообразия. Установлены геометрические характеристики исходной изотермической метрики и порожденных ею 2D метрик.

Ключевые слова: Интегральная геометрия, рефракционная томография, риманова метрика, кривизна, лучевое преобразование, послойная реконструкция.

Введение. Явление рефракции луча, вдоль которого распространяется сигнал, возникает в процессе зондирования неоднородной среды физическим полем практически любой природы. В рамках рентгеновской модели томографии этим эффектом обоснованно пренебрегают. Но в ряде других постановок, например, в сейсмической томографии, рефракция значительна. Более того, она представляет собой важнейший элемент модели, который с необходимостью в неё включается. В работе рассматривается вариант постановки задачи рефракционной томографии, в котором рефракция в области моделируется заданной римановой метрикой. В двумерном случае аналогичные постановки, в которых риманова метрика задаётся фундаментальным тензором, хорошо известна, а сами задачи решаются численными методами. В частности, такой подход применялся к задаче эмиссионной томографии по определению распределения заданных в ограниченной плоской области внутренних источников. В качестве исходных данных выступали значения лучевых преобразований при известных коэффициентах поглощения и метрическом тензоре, а сама задача решалась алгоритмами МНК с использованием многочленов или B -сплайнов в качестве базисов [2, 3].

Образ лучевого преобразования является функцией четырех переменных, поэтому обратная задача переопределена: требуется по 4D данным найти 3D функцию. В томографии для сокращения размерности данных прибегают к одному из двух подходов. В первом 3D задача сводится к серии 2D задач, решение каждой из которых

дает след искомой 3D функции на одной из параллельных плоскостей заданного семейства. Второй подход состоит в использовании конусной схемы наблюдения, в которой источники трансмиссии располагают на пространственной кривой, и топологическая размерность данных тогда сокращается до трех [1].

Введение в модель 3D томографии явления рефракции значительно усложняет задачу, так как произвольная риманова метрика, как правило, не обладает семействами вполне геодезических 2D подмногообразий, аналогичных по своим свойствам семействам плоскостей в евклидовом 3D пространстве. Возникает вопрос о существовании римановых многообразий с метриками, позволяющими свести 3D задачу интегральной геометрии (рефракционной томографии) к серии двумерных, и, тем самым, прибегнуть к стандартной методике послойного восстановления искомой функции. Рассматривается модель рефракционной томографии в полупространстве, допускающая применение метода послойного решения 3D задачи.

Постановка задачи. Пусть (D, g) — риманова область в $\mathbb{R}^3$, т.е. область D с заданной в ней простой римановой метрикой g с элементом длины

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j, \quad (1)$$

где $x = (x^1, x^2, x^3) \in D$ (по разноразмерным индексам в одном мономе подразумеваем суммирование по i, j от 1 до 3). Риманова метрика — простая, если любые две точки из $\bar{D} \equiv D \cup \partial D$ соединяются единственной геодезической, а риманова область — риманово многообразие, атлас которого состоит из одной карты. Для точек $x, y \in \bar{D}$ через $\gamma_{x,y}(t)$ обозначаем геодезическую, соединяющую эти точки.

Геодезические метрики (1) являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k(x) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

а символы Кристоффеля задаются формулами

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kp} \left(\frac{\partial g_{jp}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{pi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} \right).$$

В качестве области D выбирается полупространство $\mathbb{R}_{x^3+}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 | x^3 > 0\}$. Индексные обозначения координат (x^1, x^2, x^3) и традиционные (x, y, z) равноправны. Изотермическая риманова метрика

$$ds^2 = \lambda^2(x, y, z)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2)$$

заданная в $\mathbb{R}_{z+}^3$, полагается известной. Изучается случай $\lambda(x, y, z) = (az + b)^{-1}$. Выявлены вполне геодезические подмногообразия полупространства с метрикой (2).

Рассматривается задача интегральной геометрии, состоящая в восстановлении функции $\lambda(x, y, z)$ по её лучевому преобразованию

$$\mathcal{P}(p, q) = \int_0^{t_+} \lambda(\gamma_{p,q}(t)) dt, \quad p \in D \cup \partial D, \quad q \in \partial D.$$

Обоснован подход, позволяющий свести решение 3D задачи к решению серии 2D задач рефракционной томографии.

Связь 3D и 2D задач. Ограниченную поверхность $E \subset D$ будем называть вполне геодезической подобластью, если из того, что $p, q \in E$ следует, что $\gamma_{p,q} \subset E$.

Риманову метрику g , заданную в D , назовем точно расслаивающей область D метрикой, если:

- 1) для любой точки $p \in D \setminus \partial D$ существует хотя бы одна вполне геодезическая подобласть E_p , содержащая точку p ;
- 2) в области D существует хотя бы одна геодезическая $\gamma(t)$ такая, что вполне геодезические подобласти E_p, E_q , соответствующие различным точкам $p \equiv \gamma(t_1), q \equiv \gamma(t_2)$ геодезической, не пересекаются.

Введем следующие обозначения:

$S_{p_0, R}^2$ — сфера радиуса $R > b/a$ с центром в точке $p_0(x_0, y_0, -b/a)$;

$S_{q_0, \rho}^1 \in \partial \mathbb{R}_{z+}^3$ — окружность радиуса ρ с центром в точке $q_0(x_0, y_0, 0)$;

$B_{q_0, \rho}^2 \in \partial \mathbb{R}_{z+}^3$ — круг радиуса ρ с центром в точке $q_0(x_0, y_0, 0)$.

Рассмотрим один класс точно расслаивающих полупространство D римановых метрик. Компоненты метрического тензора $g_{jj} = (az + b)^{-2}$, $j = 1, 2, 3$, $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Отличные от нуля символы Кристоффеля таковы: $\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{33}^3 = -\Gamma_{11}^3 = -\Gamma_{22}^3 = -\frac{a}{az + b}$.

Тензор Коттона задается соотношением $(i, j, k, l, s = 1, 2, 3)$ $C_{ijk} = \nabla_k \mathfrak{R}_{ij} - \nabla_j \mathfrak{R}_{ik} + \frac{1}{4}(\nabla_j \mathfrak{R} g_{ik} - \nabla_k \mathfrak{R} g_{ij})$, где ∇_k — оператор ковариантного дифференцирования по переменной x^k , тензор Риччи и скалярная кривизна заданы формулами $\mathfrak{R}_{jk} = \mathfrak{R}_{jks}^s = \frac{\partial}{\partial x^s} \Gamma_{jk}^s - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{js}^s + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{sl}^l - \Gamma_{js}^l \Gamma_{kl}^s$, $\mathfrak{R} = g^{jk} \mathfrak{R}_{jk}$, соответственно.

Лемма 1. Пусть $\lambda = \lambda(z) = (az + b)^{-1}$, $a, b > 0$, $z \geq 0$. Тогда скалярная кривизна метрики (2) постоянна, $\mathfrak{R} = -6a^2$; тензор Коттона C_{ijk} обращается в нуль.

Известно [4], что система уравнений геодезических метрики (2), при $\lambda(z) = (az + b)^{-1}$, разрешима в квадратурах, а её геодезические представляют собой дуги окружностей, лежащих в плоскостях, параллельных оси z . Так, геодезическая, проходящая через две точки $q_1(x_1, y_1, 0), q_2(x_2, y_2, 0) \in \mathbb{R}_{z+}^3$, представляет собой дугу окружности радиуса r с центром в точке p_0 , лежащей в плоскости $P_{q_1 q_2}$, где

$$r = \sqrt{b^2/a^2 + |q_1 - q_2|^2/4}, \quad p_0 = ((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2, -b/a), \quad (3)$$

Укажем уравнение, которым задаётся “вертикальная” плоскость, $P_{q_1 q_2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y - (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0\}$. Удобно использовать параметрическое уравнение плоскости, $p = p_0 + u e_1 + v e_2$, которое задаёт систему координат на каждой из “вертикальных” плоскостей, содержащих геодезические метрики (2). В параметрическом уравнении точка $p(x, y, z)$ — текущая точка плоскости, начало координат p_0 определено в (3). Базисные векторы $e_1 = (q_1 - q_2)/|q_1 - q_2|$, $e_2 = (0, 0, 1)$ ортонормальны и коллинеарны плоскости $P_{q_1 q_2}$.

Система наблюдения 1. Каждая из “вертикальных” плоскостей представляет собой вполне геодезическое подмногообразие топологической размерности 2. Семейства таких параллельных плоскостей формируют на плоскости $z = 0$ семейства систем наблюдения, которые схематически можно описать так: фиксируем две параллельные прямые L_1, L_2 на плоскости $z = 0$, и множество перпендикулярных им плоскостей. Точка q_1 пробегает конечное множество эквидистантных точек на прямой L_1 . Соответствующее множество точек q_2 — множество эквидистантных точек

на прямой L_2 — таково, что каждой точке q_1 соответствует единственная точка q_2 такая, что отрезок $[q_1, q_2] \perp L_1$ (L_2). Вращая построенные семейства вокруг “вертикальной” прямой, проходящей через точку, отстоящую на равных расстояниях от прямых L_1, L_2 , получаем исходные данные для решения рассматриваемой нами задачи рефракционной томографии.

Теорема 1. Пусть $a, b > 0, R > b/a$ фиксированы, $\rho = \sqrt{R^2 - (b/a)^2}, x_0 = 0, y_0 = 0, r = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Тогда:

– поверхность $S_{p_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z+}^3$ — вполне геодезическая подобласть полупространства $\mathbb{R}_{z+}^3$ с заданной на нём римановой метрикой (2) при $\lambda(x, y, z) = 1/(az + b), a, b > 0$;
– вполне геодезическая подобласть $S_{p_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z+}^3$ изометрична кругу $B_{q_0, \rho}^2 \in \partial \mathbb{R}_{z+}^3$ с римановой метрикой $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, где $i, j = 1, 2$,

$$g_{11} = (r^2 + x^2)/(a^2 r^4), \quad g_{12} = (xy)/(a^2 r^4), \quad g_{22} = (r^2 + y^2)/(a^2 r^4); \quad (4)$$

– риманова метрика (4), заданная в круге $B_{q_0, \rho}^2 \in \partial \mathbb{R}_{z+}^3$ радиуса $\rho = \sqrt{R^2 - (b/a)^2}$ обладает постоянной отрицательной скалярной кривизной $\mathfrak{R} = -2a^2$.

Следствие 4. Геодезические римановой метрики (4), заданной в круге $B_{q_0, \rho}^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$ радиуса ρ , представляют собою “отрезки прямых линий” (проекции дуг окружностей на плоскость OXY); длина отрезков вычисляется в соответствии с метрикой (4).

Система наблюдения 2. Отметим, что для каждого круга $B_{q_0, \rho}^2 \in \partial \mathbb{R}_{z+}^3$ радиуса $\rho = \sqrt{R^2 - (b/a)^2}$ с центром в точке $q_0(x_0, y_0, 0)$, в зависимости от его радиуса (следовательно, и от радиуса R сферы $S_{p_0, R}^2$), метрика своя, и её компоненты определяются формулами (4). Таким образом, трехмерная задача, поставленная в полупространстве $\mathbb{R}_{z+}^3$, сводится к серии двумерных задач, каждая из которых поставлена в круге $B_{q_0, \rho}^2$. Из Теоремы 1 и Следствия 1 вытекает, что систему наблюдения удобно строить из концентрических кругов, в каждом из которых решается задача рефракционной томографии, а найденные решения затем переносятся на соответствующие кругам сферы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 24-21-00200).

Литература

1. Derevtsov E.Yu., Kleshchev A.G., Sharafutdinov V.A. Numerical solution of the emission 2D-tomography problem for a medium with absorption and refraction // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 1999. V. 7, No. 1. P. 83-103.
2. Деревцов Е.Ю., Светов И.Е., Волков Ю.С. Использование B -сплайнов в задаче эмиссионной 2D-томографии в рефрагирующей среде // Сиб. ж. индустриальной математики. 2008. Т. XI, №. 3(35). С. 45-60.
3. Tuy H.K. An inversion formula for cone-beam reconstruction // SIAM J. Appl. Math. 1983. V. 43. P. 546-552.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том IV. М.: ГИТТЛ., 1957. 812 с.

Дата поступления в оргкомитет: 29.08.2025

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ШАРНИРНЫХ УСТРОЙСТВ

М.Д. Ковалёв

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: mkov@ Rambler.ru, SPIN-код: 2971-6991

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Аннотация. Изучение на современном уровне шарнирно-рычажных механизмов и ферм опирается на их математическую модель. Механизмы в отличие от ферм допускают непрерывное изгибание. Во вводимой автором модели строение устройства описывается графом G , рёбра которого отвечают прямолинейным стержням, а вершины — шарнирам, расположенным на концах стержней. Некоторые из шарниров могут быть закреплены в плоскости. Задание графа G и положений закреплённых шарниров определяет рычажное отображение, сопоставляющее положениям свободных (незакреплённых) шарниров квадраты длин стержней (рычагов). Это квадратичное отображение многомерных евклидовых пространств лежит в основании геометрии шарнирно-рычажных конструкций. Пока оно недостаточно изучено. Будет поставлено несколько естественных вопросов о его геометрических свойствах.

Ключевые слова: Идеальные плоские шарнирно-рычажные устройства, математическая модель, геометрия рычажного отображения..

1. Математическая модель шарнирно-рычажных устройств

В теории механизмов исходным структурным понятием традиционно является кинематическая цепь, но это полезное при анализе несложных устройств понятие теряет смысл для сложных устройств. Поэтому, ныне описание строения механизмов стали основывать на понятии графа. В теории механизмов принято использовать граф, вершинам которого отвечают звенья механизма (твёрдые тела), а рёбра отвечают кинематическим парам, связывающим звенья. Однако, для анализа шарнирно-рычажных механизмов более подходит граф G , вершины которого отвечают кинематическим (вращательным) парам, а рёбра — рычагам. Опишем эту впервые предложенную в работе [1] модель.

Понятие шарнира не равнозначно понятию вращательной пары. Если в шарнире соединены лишь два рычага, — то этому шарниру отвечает обычная вращательная пара. Если в шарнире соединены $k > 2$ рычагов, то это так называемый совмещённый шарнир с одним общим центром вращения для всех k рычагов. В этом шарнире каждый из k рычагов допускает проворачивание, независимое от остальных рычагов. Если же конец рычага не соединён ни с каким другим рычагом, то в нём нет кинематической пары. В теории механизмов обычно рассматривают закреплённые в плоскости (стойке) конструкции. Закрепление производится шарнирами, также

допускающими полное проворачивание. В закреплённом шарнире непременно имеется хотя бы одна кинематическая пара.

Структурный граф $G = G(V, E)$ устройства мы считаем связным без петель и кратных рёбер. Более того, при наличии закреплённых шарниров, порождённый свободными шарнирами подграф графа G также считаем связным. Это условие налагается, чтобы не считать одним механизмом кинематически не связанные между собой устройства. И, естественно, в G нет рёбер, соединяющих вершины, отвечающие закреплённым шарнирам. Пусть множество вершин $V = V_1 \sqcup V_0$, где вершины из V_0 отвечают закреплённым шарнирам устройства, а вершины из V_1 отвечают свободным шарнирам, и пусть число всех шарниров $|V| = m$, а число рычагов $|E| = r$. Совокупность графа G и положений закреплённых шарниров в плоскости называем *закреплённой шарнирной схемой (ЗШС)*. Шарнирником $\mathbf{p} = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m)$ мы называем точку пространства параметров R^{2m} . Шарнирник можно мыслить и как вполне определённую шарнирную конструкцию, шарнир $v_i \in V$ которой находится в точке $p_i = (x_i, y_i)$ плоскости. Задание ЗШС определяет многомерное евклидово пространство параметров R^{2m} и его *рычажное отображение* $F : R^{2m} \rightarrow \mathcal{R}^r$, задающееся формулами $d_{ij} = (p_i - p_j)^2, v_i v_j \in E$. Это отображение сопоставляет положениям свободных шарниров в евклидовой плоскости квадраты длин рычагов. Оно играет ключевую роль в геометрии шарнирных конструкций. Точки $\mathbf{d} = \{d_{ij}\}$ пространства $\mathcal{R}^r$ называем *кинематическими шарнирными схемами (КШС)*. КШС $\mathbf{d}$ с непустым прообразом $F^{-1}(\mathbf{d})$ называем *существенной*. Образ $F(R^{2m})$ рычажного отображения называем множеством C существенных КШС. Если размерность $\dim C = r$, то рычажное отображение F и соответствующая ЗШС называются *правильными*, в противном случае — *неправильными*.

2. Вопросы

Приведём наиболее интересные нерешённые вопросы о рычажных отображениях [2]. Кинематическую шарнирную схему $\mathbf{d}$ назовём *устойчивой*, если $\mathbf{d}$ есть внутренняя точка образа рычажного отображения. Устойчивые КШС существуют лишь для правильных ЗШС. Неустойчивая КШС либо несущественна, то есть ей не отвечает шарнирников. Либо возможно сколь угодно малое изменение её координат (квадратов длин рычагов), приводящее к несущественной КШС. Причём, квадраты d_{ij} длин некоторых рычагов этой несущественной КШС могут оказаться отрицательными, и тогда она не будет лежать в ортанте $Q : d_{ij} \geq 0$.

Кратностью КШС $\mathbf{d}$ называется количество точек в прообразе $F^{-1}(\mathbf{d})$; КШС *однократна*, если ей отвечает всего лишь одна шарнирная ферма.

Вопрос 1. *Возможна ли однократная и устойчивая КШС?*

Кинематической схеме рисунка 1 б) отвечает единственный шарнирник. Эта схема геометрически неустойчива, ибо при произвольно малом уменьшении длин рычагов ей уже не будет отвечать ни одного шарнирника. КШС рисунка 1 а) устойчива, но ей отвечает два зеркально симметричных шарнирника.

Плоский шарнирник $\mathbf{p}$ *устойчив*, если для любой его ε -окрестности $O(\mathbf{p}, \varepsilon) \subset R^{2m}$ найдется δ -окрестность $O(\mathbf{d}, \delta) \subset \mathcal{R}^r$ точки $\mathbf{d} = F(\mathbf{p})$, целиком лежащая в об-

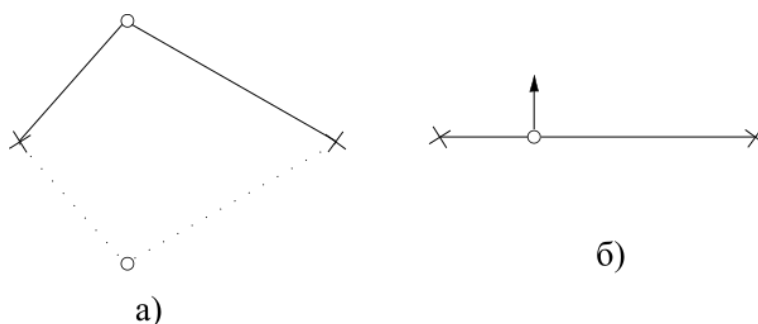


Рис. 1

разе $F(O(\mathbf{p}, \varepsilon))$. Если достаточно мало изменить длины рычагов устойчивого шарнирника, то шарнирник с измененными длинами рычагов можно будет собрать таким образом, что все его шарниры окажутся близки к соответствующим шарнирам исходного шарнирника. Неправильной ЗШС не отвечает устойчивых шарнирников.

Вопрос 2. Возможна ли устойчивая КШС $\mathbf{d}$, для которой каждый шарнирник $\mathbf{p} \in F^{-1}(\mathbf{d})$ неустойчив?

Рассмотрим плоскую закреплённую шарнирную схему, и пусть $M_i \subset R^{2m}$ множество, на котором матрица dF дифференциала отвечающего ей рычажного отображения F имеет ранг i . Пусть максимальный ранг dF равен K , а минимальный — Z . Множество вырождения рычажного отображения называем множеством $B \subset R^{2m}$, на котором $dF < K$. Заметим, что может оказаться $Z = K$, и тогда множество вырождения пусто. Например, это так для ЗШС с одним свободным и тремя закреплёнными в вершинах треугольника шарнирами.

Вопрос 3. Всегда ли множество M_Z минимального ранга содержит шарнирник с рычагом нулевой длины?

Вопрос 4. Если множество M_L постоянного ранга L имеет положительную размерность, то непременно ли оно неограниченно?

В известных примерах ответы на эти два вопроса положительны. Однако, в общем случае они пока не решены. Частичные результаты можно найти в работе [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2022-284.

Литература

1. Ковалёв М.Д. Геометрическая теория шарнирных устройств // Изв. РАН. Математика. 1994. Т. 58, № 1. С. 45–70.
2. Ковалёв М.Д. Вопросы геометрии шарнирных устройств и схем // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение. 2001. № 4. С. 33–51.
3. Ковалёв М.Д. Геометрические вопросы кинематики и статики. М.: Ленанд, 2019. 256 с.
4. Ковалёв М.Д. Некоторые свойства рычажных отображений // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12, № 1. С. 1–14.

Дата поступления в оргкомитет: 06.09.2025

SPACE-TIME PERCEPTION: WHY EVOLUTION HAS LED TO LOGARITHMIC (AND POWER LAW) SUBJECTIVE TIME AND WHY WE CANNOT REMEMBER EARLY CHILDHOOD

O. Kosheleva

PhD, Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

V. Kreinovich

PhD, Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas, USA

Аннотация. It is known that subjective perception of time is biased: the perceived time is, in general, different from the physical time. Empirical studies have shown that in the first approximation, the dependence of subjective time on physical time is described reasonably well by a power law – and even better by a logarithm. In this paper, we show that such a dependence is indeed optimal with respect to any reasonable optimality criterion. Since we humans are a product of billions of years of optimizing evolution, this proven optimality explains why these dependencies reasonably accurately describe our time perception. We also explain why we cannot remember early childhood events.

Ключевые слова: Subjective time, logarithmic dependence, optimality, early childhood memories..

1. Formulation of the problem

Subjective time: empirical observation. It is known that subjective time s – time that we perceive – differs from physical time t . For example, as we age, time seems to go faster; see, e.g., [2, 3, 5].

According to [5], in the first approximation, the dependence of subjective time s on physical time t is well described by a power law $s \sim t^\alpha$. The most accurate description comes when we take α close to 0, when we have

$$t^\alpha = (\exp(\ln(t)))^\alpha = \exp(\alpha \cdot \ln(t)) \approx 1 + \alpha \cdot \ln(t),$$

i.e., in effect, when we consider a logarithmic dependence.

A natural question: why? We humans are the result of billions of years of improving evolution. This means that practically every feature of our biology is optimal (or at least close to optimal). If a feature was not optimal, during the evolution process, a better feature would have appeared and replaced it. In particular, power law and logarithmic dependence of subjective time on physical time must be optimal in some reasonable sense. So why are these particular dependencies optimal?

What is known. There exist partial explanations for the difference between subjective and objective time. For example, in [1], this difference is explained by the need to make decisions under uncertainty. However, to the best of our knowledge, there have been no explanations for the emergence of the observed specific dependencies: power law and logarithm.

What we do in this paper. In this paper, we prove that in the first approximation, power law and logarithmic dependencies are indeed optimal – and optimal in the sense of all reasonable optimality criteria. Our result also explains why we cannot remember early childhood.

2. Our explanation

We may have the whole family of optimal functions. At first glance, one may think that we need to select *the* optimal function $s = f(t)$ that describes how the numerical value of the subjective time s depends on the numerical value of the physical time t . However, the numerical value of the physical time depends on the choice of the measuring unit: if instead of hours, we count minutes, then 2 hours becomes 120 minutes. The numbers are different, but the physical situation is the same. In general, in a new unit which is λ times smaller than the original measuring unit, the numerical value of time changes from t to $t' = \lambda \cdot t$. Thus, $t = t'/\lambda$. So, in terms of the new unit, the formula for subjective time has a different form: $s = f(t'\lambda)$. In other words, instead of the original function $f(t)$, we now have a new function $f'(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t/\lambda)$.

The two functions $f(t)$ and $f'(t)$ describe the exact same dependence of subjective time on physical time. Thus, if one of these functions is optimal, the other one should be optimal too. Hence, we indeed have the whole family of optimal functions. So, instead of individual functions, we should consider families of functions.

In general, a family of functions can be described as $\{f(t, c_1, c_2, \dots)\}$, for possible parameters $c_1, c_2, \dots$. The more parameters, the more accurately we can describe the phenomenon of interest – but the more complex the corresponding model becomes. Thus, in the first approximation, it makes sense to consider families $\{f(x, c_1, \dots, c_k)\}$ with the smallest possible number of parameters k .

What do we mean by “optimal”. In principle, we can have different optimality criteria for selecting a family of functions. What they all have in common is that they all enable us, for every two families a and b , to decide whether a is better than b (or of the same quality as b) – according to this criterion; we will denote this by $a \succeq b$. This relation has to be transitive: if a is better than b and b is better than c , then a should be better than c . Also, by the meaning of the relation $\succeq$, we should have $a \succeq a$.

A family a_{opt} is *optimal* if it is better than all other families, i.e., $a_{\text{opt}} \succeq a$ for all families a .

The optimal criterion should be final. If several different families are optimal, then we can use this non-uniqueness to optimize something else. This means that the original optimality criterion was not final: we have a better criterion that takes the additional optimality into account. So, it makes sense to consider only *final* optimality criteria, i.e., criteria for which there is exactly one optimal family.

The optimality criteria should not change if we use different measuring units and/or different starting points. In addition to selecting a different measuring unit, we can select a different starting point. If we select, as a new starting point, a moment of time which is t_0 units earlier than the original one, then for each value t in the original setting, the value in the new setting is equal to $t + t_0$. In general, if we can change both the measuring unit and the starting point, then the new value becomes $t' = \lambda \cdot t + t_0$. Similarly, we change the starting point and the unit for subjective time. The relative quality of two families should not change if we simply change the measuring units and starting points but leave the physics intact.

In the new units, the original function $f(t)$ takes the form $f'(t) \stackrel{\text{def}}{=} A \cdot f(c \cdot t + d) + B$ for some values $A > 0$, $B, c > 0$, and d . We will say that the original function $f(t)$ and the new function $f'(t)$ are *linearly equivalent*. Thus, in the new units, the original family a becomes $T_{A,B,c,d}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \cdot f(c \cdot t + d) + B : f(t) \in a\}$. In these terms, the desired *invariance* means that if $a \succeq b$, then, for each $A > 0$, $B, c > 0$, and d , we should have $T_{A,B,c,d}(a) \succeq T_{A,B,c,d}(b)$.

We are ready to prove that the selected functions are indeed optimal. This optimality of logarithm and power law dependencies follows from the following result (proven in [4]):

Теорема 1. *The smallest k for which there exists a final invariant optimality criterion is $k = 3$. For this k , for each final invariant optimality criterion, each function from the optimal family is linearly equivalent either to $\log(x)$, or to x^α for some α , or to $\exp(x)$.*

But why logarithm? The above result lists three different functions, so why is logarithm better describing the observed phenomenon and not any other function? To answer this question, let recall that subjective time is, by definition, subjective: it only makes sense starting from the moment T at which the corresponding person was born. So, it makes sense to have function $f(t)$ that cannot be defined for $t < T$.

This immediately excludes exponential functions – since they are defined for all possible values t . This also excludes power law functions – since they can be extended to all values t , e.g., as $\text{sign}(t) \cdot |t|^\alpha$. So, the only remaining function is $\log$ – and logarithm that is not defined at the birthday T , i.e., logarithm of the form $A \cdot (c \cdot \log(t - T)) + B$. Since the logarithm of the product is equal to the sum of the logarithms, we get

$$A \cdot \log(t - T) + (A \cdot \log(c) + B).$$

After an appropriate linear re-scaling of subjective time, we get the function $f(t) = \log(t)$, which is, in the first approximation, exactly what is observed.

Why logarithm works better than power law: an alternative explanation. The above result includes both $\log$ and power law as possibly optimal functions, so why is $\log$ – which, as we have shown in Section 1, is corresponding to $\alpha \rightarrow 0$ – better?

To provide an alternative answer to this question, let us recall that in general, the maximum of a function on a bounded domain is attained either at a local maximum – where all the partial derivatives are 0s – or at a point on a domain's boundary. Often, the

domain is small enough so that it does not contain any local maxima. In this case, the maximum is attained at the boundary.

In our case, the domain consists of all non-negative values α . The boundary of this domain is exactly the point $\alpha = 0$. So, it is not surprising that, according to empirical data, the optimum is attained at this boundary point $\alpha = 0$.

So why cannot we remember early childhood? Early childhood are times for which $t \approx T$ and $t - T \approx 0$. For $t = T$, the logarithm $\log(t - T)$ is equal to $-\infty$. Thus, the subjective time that has passed between that time and now, tends to infinity as we get closer and closer to the birth date. So, no matter how far away in subjective time we remember, we cannot remember up to an infinite subjective time interval – there is always a limit to our ability to store information. Whatever happened earlier than this limit, we cannot remember.

Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants 1623190 (A Model of Change for Preparing a New Generation for Professional Practice in Computer Science), HRD-1834620 and HRD-2034030 (CAHSI Includes), EAR-2225395 (Center for Collective Impact in Earthquake Science C-CIES), and by the AT&T Fellowship in Information Technology.

It was also supported by a grant from the Hungarian National Research, Development and Innovation Office (NRDI), by the Institute for Risk and Reliability, Leibniz Universitaet Hannover, Germany, and by the European Union under the project ROBOPROX (No. CZ.02.01.01/00/22 008/0004590).

References

Литература

1. Bokati L., Kreinovich V. Decision theory explains ‘Telescoping Effect’ – that our time perception is biased // *Journal of Uncertain Systems*. 2019. V. 13, No. 2. P. 100–103.
2. Crawley S.E., Pring L. When did Mrs. Thatcher resign? The effects of ageing on the dating of public events // *Memory*. 2000. V. 8, No. 2, P. 111–121.
3. Janssen M.J., Chessa A.G., Murre M.J. Memory for time: how people date events // *Memory and Cognition*. 2006. V. 34, No. 1. P. 138–147.
4. Kosheleva O., Kreinovich V., Lauter C., Ruiz-Rohena K. Logarithmic number system is optimal for ai computations: theoretical explanation of an empirical success // *Proceedings of the 16th European Symposium on Computational Intelligence and Mathematics ESCIM 2025*, A Coruña, Spain, May 18–21, 2025.
5. Lemlich R. Subjective acceleration of time with aging // *Perceptual and Motor Skills*. 1975. V. 41, No. 1. P. 235–238.

Дата поступления в оргкомитет: 04.08.2025

BECAUSE OF SPACE-TIME SYMMETRIES, ACCEPTABLE MICRO-ACAUSALITY INEVITABLY LEADS TO THE POSSIBILITY OF MACRO-SCALE CAUSALITY VIOLATIONS

O. Kosheleva

PhD, Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

V. Kreinovich

PhD, Professor, e-mail: vladik@utep.edu

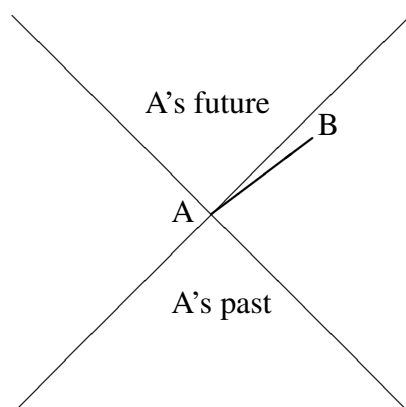
University of Texas at El Paso, El Paso, Texas, USA

Аннотация. In this paper, we show that because of natural space-time symmetries, acceptable micro-violations of causality inevitably lead to the possibility of macro-scale causality violations. We also discuss how such macro-scale violations can be potentially detected.

Ключевые слова: Causality violations, space-time geometry, symmetries..

1. Micro-causality violations are acceptable in quantum physics

General idea. According to quantum physics (see, e.g., [2–4]), the actual values of all the fields include random fluctuations. In particular, this is true for the actual values of the metric tensor g_{ij} that described space-time – and its causality. This means, in particular, that even in flat Minkowsky space-time, due to quantum effects, the actual speed of light – as determined by the local values of the metric tensor field – fluctuates around the classical value c . This means that in some locations and in some directions, the speed of light is slightly larger than c – i.e., that we have causal effects outside the usual future cone:



Comment. Of course, in the above picture, the deviation from the non-quantum causality is grossly exaggerated: the actual quantum-based fluctuations of the metric tensor in the

Minkowski space are very small, several orders of magnitude below what we can currently detect.

Additional confirmation. In the previous text, we explained general reasons why quantum physics can lead to micro-causality violations – i.e., to micro-effects that seemingly violate the usual causality. Detailed analysis of quantum field theory – see, e.g., [1] – confirms this general conclusion. Namely, this analysis shows that on the microscopic level, the quantum Green function – that describes the effect of a single space-time event – spreads beyond the usual future cone: a little bit beyond, but still beyond.

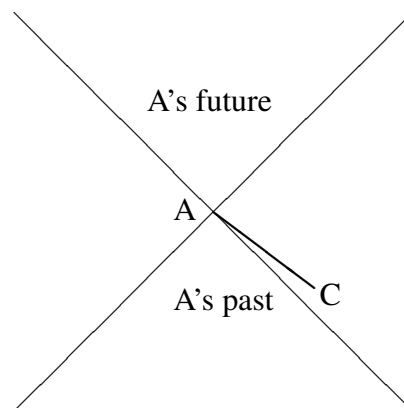
2. Because of symmetries, this leads to the possibility of macro-scale causality violations

Symmetries: reminder. Minkowski space-time of Special Relativity has many symmetries:

- spatial and temporal shifts,
- spatial rotations,
- scalings (homotheties) $t \mapsto \lambda \cdot t$ and $x_i \mapsto \lambda \cdot x_i$, and
- last but not the least, Lorentz transformations – that describe a transition to a moving frame of reference.

Specific feature of these symmetries. It is known that for each space-time point A, and for every two points B and C which are not in the future or past of A, there is a symmetry that keeps A intact and turns B into C. In particular, by using only Lorentz transformations, we can:

- transform the above-described space-time point B – that is close to the future cone
- into a point C that is close to the past cone; see below.

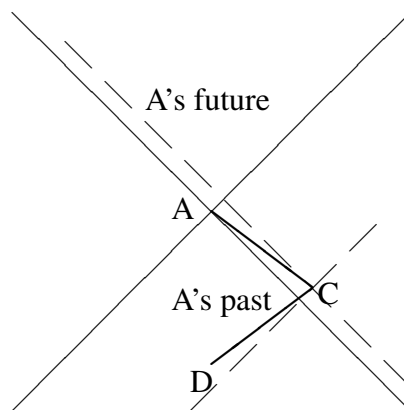


This transformation corresponds to using a new frame of reference, a frame that is moving with speed close to the speed of light c in relation to the original frame.

How this can lead to a macro-scale causality violation. In the last picture, we are close to the past cone, but we are still outside the past cone, i.e., we do not (yet) have a causality violation. However, if we combine two such effects:

- the effect of A on C and
- a similar effect of C on a new space-time point D,

then we get an effect of the space-time point A on the space-time point D, which is located in A's past:



Specifics. To get from A to C, we need to use a coordinate frame that moves, with respect to the original one, with a speed close to the speed of light. To get from C to D, we need to use yet another frame that also moved with a speed close to c with respect to the original frame – but that moves in the opposite direction.

So, to affect the past from our state, we need to have two auxiliary systems that move with a speed close to the of light in two opposite directions.

- We then engage a micro-causal violation in the first moving system – which enables us to, e.g., send a signal from our space-time point A to an auxiliary space-time point C.
- After that, we engage a micro-causal violation in the second moving system – which enables us to forward the signal form the auxiliary space-time point C to the desired space-time point D which is located direction in our past.

3. How can we detect such processes

The above possibility is theoretically possible, but it is way beyond our abilities. The above scheme requires that we move complex devices with a speed very close to the speed of light. There are no fundamental physical reasons why we cannot do that, but at present, our technology is not yet capable of this. The closest we can do is accelerate, in a particle

accelerator, a small set of protons or alpha-particles to speeds close to the speed of light – but this is very far from similarly accelerating the whole quantum device that would enable us to observe and utilize micro-violations of causality.

While we cannot (yet) implement this scheme, we can try to detect if anyone uses such schemes. The fact that we cannot yet implement such a scheme does not mean that the above analysis is completely useless: while we cannot *implement* this scheme, we can try to *detect* whether anyone in the Universe uses such schemes.

To implement such a scheme, it is necessary to have two systems moving in opposite directions with speed close to speed of light. This will enable us to perform a *one-time* communication with the past. To maintain *continuous* communication with the past, we need steady flows going with speeds close to c in opposite directions. Interestingly, in our Universe, there are many astronomical objects with such hyper-relativistic flows. So maybe some advance civilization out there uses these natural phenomena to communicate with the past? And maybe some of such objects have been artificially designed by these civilizations with the explicit purpose of communicating with the past?

Based only on the close-to- c speeds, it is difficult to decide whether such objects naturally appeared this way and if yes, whether they are utilized for communicating with the past. But what we do is pay special attention to these objects – e.g., try to decode the radio signals coming from these objects, or look for other features that would indicate that this is a not a completely naturally appearing phenomenon.

Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants 1623190 (A Model of Change for Preparing a New Generation for Professional Practice in Computer Science), HRD-1834620 and HRD-2034030 (CAHSI Includes), EAR-2225395 (Center for Collective Impact in Earthquake Science C-CIES), and by the AT&T Fellowship in Information Technology.

It was also supported by a grant from the Hungarian National Research, Development and Innovation Office (NRDI), by the Institute for Risk and Reliability, Leibniz Universitaet Hannover, Germany, and by the European Union under the project ROBOPROX (No. CZ.02.01.01/00/22 008/0004590).

Литература

1. Akhiezer A.I., Berestetsky V.B. Quantum electrodynamics. New York: Interscience Publishers, 1965. 875 P.
2. Feynman R., Leighton R., Sands M. The Feynman lectures on physics. New Millenium, 2011. 1552 P.
3. Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. Gravitation. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2017. 1336 P.
4. Thorne K.S., Blandford R.D. Modern classical physics: optics, fluids, plasmas, elasticity, relativity, and statistical physics. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2021. 1552 P.

Дата поступления в оргкомитет: 04.08.2025

ON THE SPACE OF CHRONOMETRIC PROTON'S WAVE FUNCTIONS: SCALING-BASED DETECTION OF ITS NEW ELEMENTS

A.V. Levichev

D.Sc., professor, e-mail: alevichev@gmail.com

Ershov Institute of Informatics Systems, Novosibirsk, Russia

Аннотация. In [1] (i.e., the year 2024 "Proton Therapy – Scientific Questions and Future Direction" edited by T. J. FitzGerald), the Multi-Level Model (= MLM) was outlined as a conceptual framework proposed by Levichev. In particular, in a chapter ([2]), the proton's theoretical description was given in an endeavor of its future application in proton therapy for cancer patients. This exploration potentially opens a novel era of the intricate interplay between wave functions (mathematically, they form an infinite-dimensional space F_p , see [3]) and proton beams produced by different vaults. The current talk is an attempt of further research in these (theoretical as well as practical) directions.

Ключевые слова: Proton as an elementary particle, standard and multi-level models, Wigner-Segal methods, chronometric proton's space of wave functions..

1. On the proton's theoretical description based on Wigner-Segal approach to elementary particles

Let us outline certain properties of functions f belonging to the above-mentioned space F_p . In [4, Figure 1], some distinct instances ("snap shot photos") of the functions f (from F_p) have been captured at the temporal instant $t = 0$. It was an ND -case, that is, with a single (global) maximum (with no other extreme points), here ND is for 'No Dent'. In [4, Figure 2], it was the WD -case, i.e. 'With Dent', a 'toy' example of a function f , since only two space variables were involved. In other sections of [4], the authors went beyond these two cases ($ND \& WD$) by applying the action of a scale transformation (or scaling, simply). Due to the expected (= medical) audience, the Section 2 of [4] presented illustrating examples, as if functions f were real and of a single variable ones. The current reader is also invited to have a look at the corresponding sections of [2, 4] where figures illustrate pretty many possible cases and applications of certain methods, based on the vector structure of F_p .

2. More on the space F_p : rigorous definitions

Like in equation (6) of [2], but without providing the kernel $K(h, w)$ explicitly, the f -value at event h is the $2 - \dim$ complex vector $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L}(h) = K(h, w)v. \quad (1)$$

Event h (with time coordinate x_0 and space coordinates x_1, x_2, x_3) is presented in a (well-known in theoretical physics) 2 by 2 matrix form. That is, each wave function (or state) of that type is defined by choosing a matrix w and a vector v . In [2, Theorem 4] we managed to choose w and v in such a way, that the (real) values $r(h) = \mathbf{L}\mathbf{L}^*$ define an ND -state f (compare to [4, Figure 3]) – with a single point of maximum, and to [4, Figure 1]. In the canonical product $\mathbf{L}\mathbf{L}^*$ (which is a real number) the vector $\mathbf{L}^*$ is a complex conjugate of $\mathbf{L}$ from (1). As it was stated in [4], The validity of the following statement (t there is a real parameter, while e is the coefficient of the scaling involved) is based on [3]:

Лемма 1. *The image of f under scaling (with coefficient e) is u of type (1) but with $w^\sim = e^{-t}tw, v^\sim = e^{5t/2}v$.*

Then (in the last section of [4]), the authors have looked for points of extrema for the (real) function

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^* = L_1L_1^* + L_2L_2^*, \quad (2)$$

where each of the two summands of (2) has been given explicitly (see [4], equations (2) and (3)).

The paper [4] ends up as follows: in the $x_2 = 0$ section of the graph of (2), there should be critical points (in [4] they have not been explicitly detected, but the existence of at least one global maximum and of one local minimum followed from the graphics of Figure 8 there). The current talk by Levichev sheds light on how such a conclusion can be based on analytical (rather than purely visual) grounds.

Литература

1. Proton Therapy – Scientific Questions and Future Direction. Monography, Intechopen. 2024. 88 pp. ISBN 978-0-85466-340-8. URL: <https://www.intechopen.com/books/1003236>.
2. Klevtsova Yu., Levichev A., Neshchadim V., Palyanov A. The Proton's Theoretical Description, Based on Wigner-Segal Approach to Elementary Particles. URL: <https://www.intechopen.com/chapters/1160023>.
3. Jakobsen H.P., Levichev, A.V. The representation of $SU(2,2)$ which is interpreted as describing chronometric fermions (proton, neutrino, and electron) in terms of a single composition series // Rep. on Math. Phys. 2022. V. 90, No. 1. P. 103–121.
4. Klevtsova Yu., Levichev A., Neshchadim V., Palyanov A. An Overview of the Perspective MLM-Applications to Theoretical Aspects of the Radiation Therapies // Amer. J. Biomed Sci & Res. 2025. V. 28(3), accepted for publication.

Дата поступления в оргкомитет: 06.09.2025

О ПОСЛОЙНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ЦИЛИНДРЕ

С.В. Мальцева

к.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: maltsevasv@math.nsc.ru, SPIN-код: 6712-2742

Е.Ю. Деревцов

д.ф.-м.н., г.н.с., e-mail: eydert@mail.ru, SPIN-код: 6372-6408

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Аннотация. Рассматривается задача интегральной геометрии об определении заданного в цилиндрической области с известной рефракцией векторного поля по его лучевым преобразованиям. Обоснован подход, по которому решение 3D задачи может быть сведено к решению серии двумерных. Возможность такого подхода обусловлена заданием в цилиндре моделирующей рефракцию римановой метрики, допускающей семейства вполне геодезических подмногообразий размерности два.

Ключевые слова: Интегральная геометрия, рефракционная томография, риманова метрика, векторное поле, цилиндр, лучевое преобразование, послойная реконструкция.

Задача рефракционной томографии в трехмерной постановке существенно отличается от задач традиционной компьютерной 3D-томографии, постановки которых не включают в себя явление рефракции. Отметим, что значения лучевого преобразования, действующего в трехмерном пространстве, зависят от четырех переменных, и, таким образом, естественно возникает задача сокращения топологической размерности данных. Для этого, как правило, прибегают к одному из двух подходов. В первом 3D-задача сводится к серии двумерных задач, решение каждой из которых дает след на плоскости восстанавливаемой функции, зависящей от трех переменных. Обычно такая плоскость является одной из фиксированного семейства параллельных плоскостей. Второй подход состоит в использовании конусной схемы наблюдения, в которой источники трансмиссии располагают на пространственной кривой, удовлетворяющей определенным геометрическим требованиям. Задача, тем самым, ставится как задача конусной томографии, и топологическая размерность данных сокращается до трех [1].

В двумерном случае проблемы переопределённости данных не возникают. Постановки задач в рамках 2D рефракционной томографии, в которых моделирующая рефракцию риманова метрика задаётся фундаментальным тензором, хорошо известны; сами же задачи решаются численными методами. В частности, такова постановка задачи эмиссионной томографии по определению распределения заданных в ограниченной плоской области внутренних источников. В качестве исходных данных выступают при этом значения лучевых преобразований при известных коэффициентах поглощения и метрическом тензоре. Задача при этом решалась численно

алгоритмами МНК с использованием многочленов или B -сплайнов в качестве базисов [2, 3].

Постановка задачи. Пусть в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$ задана простая риманова метрика g с элементом длины

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j, \quad (1)$$

где $x = (x^1, x^2, x^3) \in D$ (по разноразмерным индексам в одном мономе подразумеваем суммирование по i, j от 1 до 3). Метрика *простая*, если любые две точки из $\bar{D} \equiv D \cup \partial D$ соединяются единственной геодезической. Говорят о *римановой области*, если речь идёт о римановом многообразии, атлас которого состоит из одной карты. Через $\gamma_{x,y}(t)$ обозначается геодезическая, соединяющая точки $x, y \in \bar{D}$.

Геодезические метрики (1) являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k(x) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2)$$

а символы Кристоффеля задаются формулами

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kp} \left(\frac{\partial g_{jp}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{pi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} \right). \quad (3)$$

Рассматривается задача интегральной геометрии, состоящая в определении векторного поля $v(x^1, x^2, x^3) = (v_1, v_2, v_3)$ по его изветному для всевозможных пар точек $p, q \in \partial D$, лучевому преобразованию

$$\mathcal{P}(p, q) = \int_0^{t_+} v_j(\gamma_{p,q}(t)) \dot{\gamma}_{p,q}^j(t) dt, \quad p \in D \cup \partial D, \quad q \in \partial D,$$

где $\dot{\gamma}_{p,q}(t)$ — касательный вектор геодезической при $t \in (0, t_+)$, $\gamma_{p,q}(0) = p$, $\gamma_{p,q}(t_+) = q$. $0, t_+$ — значения параметра, при которых геодезическая пересекается с границей цилиндра.

Связь 3D и 2D задач. Ограниченную поверхность $E \subset D$ будем называть вполне геодезической подобластью, если из того, что $x, y \in E$ следует, что $\gamma_{x,y} \subset E$. Риманову метрику g назовем точно расслаивающей область D метрикой, если:

- для любой точки $x \in D \setminus \partial D$ существует хотя бы одна вполне геодезическая подобласть E_x , содержащая точку x ;
- в области D существует хотя бы одна геодезическая $\gamma(t)$ такая, что вполне геодезические подобласти E_x, E_y , соответствующие различным точкам $x \equiv \gamma(t_1), y \equiv \gamma(t_2)$ геодезической, не пересекаются.

В качестве области D выберем цилиндр $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 < R^2; 0 < x^3 < H\}$ для некоторых фиксированных положительных $R, H \in \mathbb{R}$. Зададим в D риманову метрику специального вида

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^1, x^2) dx^\alpha dx^\beta + g_{33}(x^3) (dx^3)^2. \quad (4)$$

Здесь по разноразмерным индексам, обозначенным греческими буквами α, β подразумевается суммирование от 1 до 2. Вычисляя символы Кристоффеля Γ_{ij}^k , задаваемые формулами (3), получаем, что отличные от нуля символы Кристоффеля $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{11}^2, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{22}^2$ зависят лишь от переменных x^1, x^2 , а отличный от нуля символ

Γ_{33}^3 зависит лишь от x^3 . Отсюда следует, что система уравнений (2), определяющая геодезические, в случае метрики (4) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x^1}{ds^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{dx^1}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^2}{ds} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 = 0 \\ \frac{d^2 x^2}{ds^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{dx^1}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^2}{ds} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 = 0 \\ \frac{d^2 x^3}{ds^2} + \Gamma_{33}^3 \left(\frac{dx^3}{ds} \right)^2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) не является неприводимой, и распадается на две независимые системы уравнений. Первая система состоит из первых двух уравнений (5), а вторая — из третьего уравнения системы. Следовательно, геодезические, являющиеся решениями (5), суть прямые произведения решений первой подсистемы и решений второй подсистемы (из одного третьего уравнения).

Отсюда следует, что всякий круг $B = C \cap \{x^3 = h, 0 \leq h \leq H\}$ есть вполне геодезическая подобласть римановой области C с индуцированной метрикой $g_{\alpha\beta}$,

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^1, x^2) dx^\alpha dx^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (6)$$

Всякое решение третьего уравнения системы (5) с соответствующими начальными условиями есть (визуально) отрезок прямой, параллельный оси x^3 , но его риманова длина не совпадает с евклидовой. Любая геодезическая, выпущенная из произвольной точки $x_0 \in C \cap \{x^3 = H\}$ в направлении вектора $\xi_0 = (0, 0, \xi_0^3)$, пересекает все вполне геодезические подобласти цилиндра C . Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Риманова метрика вида (4), заданная в цилиндре C , является точно расслаивающей область C метрикой.*

Лемма 1. *Пусть компоненты римановой метрики (4) имеют вид $g_{11} = g_{22} = e^{2\lambda(x^1, x^2)}$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{33} = e^{2\mu(x^3)}$. Тогда ненулевые значения символов Кристоффеля суть $\Gamma_{11}^1 = \lambda_x$, $\Gamma_{12}^1 = \lambda_y$, $\Gamma_{22}^1 = -\lambda_x$, $\Gamma_{11}^2 = -\lambda_y$, $\Gamma_{12}^2 = \lambda_x$, $\Gamma_{22}^2 = \lambda_y$, $\Gamma_{33}^3 = \mu'$; компонента тензора Римана: $R_{1212} = -e^{2\lambda}\Delta\lambda$; ненулевые компоненты тензора Риччи $R_{11} = R_{22} = -\Delta\lambda$; скалярная кривизна $R = -2e^{2\lambda}\Delta\lambda$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00200).

Литература

1. Tuy H.K. An inversion formula for cone-beam reconstruction // SIAM J. Appl. Math. 1983. V. 43. P. 546-552.
2. Derevtsov E.Yu., Kleshchev A.G., Sharafutdinov V.A. Numerical solution of the emission 2D-tomography problem for a medium with absorption and refraction // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 1999. V. 7, No. 1. P. 83-103.
3. Деревцов Е.Ю., Светов И.Е., Волков Ю.С. Использование B -сплайнов в задаче эмиссионной 2D-томографии в рефрагирующей среде // Сиб. ж. индустриальной математики. 2008. Т. XI, №. 3(35). С. 45-60.

Дата поступления в оргкомитет: 29.08.2025

О ЛУЧЕВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ МОМЕНТОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ДВУМЕРНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

А.П. Полякова^{1,2}

к.ф.-м.н., н.с., e-mail: apolyakova@math.nsc.ru, SPIN-код: 5271-1188

И.Е. Светов^{1,2}

к.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: svetovie@mail.ru, SPIN-код: 5892-3956

¹Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Аннотация. В работе исследуются интегральные операторы лучевых преобразований моментов тензорных полей в $\mathbb{R}^2$. Используя известные детальные разложения двумерных симметричных тензорных полей, установлены новые свойства лучевых преобразований моментов. В частности, получены их связи с преобразованием Радона и безвесовыми лучевыми преобразованиями.

Ключевые слова: Интегральная геометрия, тензорное поле, лучевое преобразование моментов, преобразование Радона.

Предварительные сведения. В последнее десятилетие лучевым преобразованиям моментов тензорных полей посвящено довольно много работ, в которых исследуются традиционные вопросы реконструкции тензорных полей ранга m . Необходимо отметить, что практически во всех работах в качестве данных используются продольные лучевые преобразования моментов. Упомянем статью [1], в которой впервые предложено использовать детальные разложения тензорных полей при исследовании лучевых преобразований моментов. В данной работе, используя детальные разложения двумерных симметричных m -тензорных полей (см. [2]) устанавливаются новые свойства лучевых преобразований моментов. Рассматриваются не только продольные, но и поперечные и смешанные лучевые преобразования моментов.

Единичные векторы $\xi = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\eta = (-\sin \theta, \cos \theta)$ при $\theta \in [0, 2\pi)$ и число $s \in \mathbb{R}$ определяют прямую $L_{s,\theta} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = s\xi + t\eta, t \in \mathbb{R}\}$. Преобразование Радона $\mathcal{R}$ определяется как интеграл от функции f вдоль прямых $L_{s,\theta}$ для всех s, θ :

$$(\mathcal{R}f)(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\xi + t\eta) dt.$$

Рассматривается один из вариантов интегральных операторов, порождаемых преобразованием Радона. Именно, *лучевые преобразования моментов* тензорных полей

$$(\mathcal{P}_{k,m}^{(j)} \mathbf{w})(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^2 w_{i_1 \dots i_m}(s\xi + t\eta) \xi^{i_1} \dots \xi^{i_j} \eta^{i_{j+1}} \dots \eta^{i_m} dt.$$

Здесь индекс m определяет ранг тензорного поля $\mathbf{w}$, $k \geq 0$ — порядок моментов, индекс (j) , $0 \leq j \leq m$ отвечает за количество компонент нормального вектора ξ .

При $j = m = 0$ получаем преобразование Радона $\mathcal{P}_{k,0}^{(0)}$ с весом t^k , которое при $k = 0$ совпадает с преобразованием Радона: $\mathcal{P}_{0,0}^{(0)}f = \mathcal{R}f$. Напомним, что при $j = 0$ лучевые преобразования называются *продольными*, при $j = m, m \geq 1$ — *поперечными*, а при $0 < j < m, m \geq 2$ — *смешанными*. При $k = 0$ эти операторы исследовались в [2], в частности предложен подход полного восстановления симметричного m -тензорного поля по значениям операторов $\mathcal{P}_{0m}^{(j)}, 0 \leq j \leq m$.

Операторы *внутреннего дифференцирования* d и *внутреннего $\perp$ -дифференцирования* $d^\perp$ действуют на двумерное m -тензорное поле w по формулам:

$$(dw)_{i_1 \dots i_m j} = \frac{1}{m+1} \left(\frac{\partial w_{i_1 \dots i_m}}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_m}}{\partial x^{i_k}} \right),$$

$$(d^\perp w)_{i_1 \dots i_m j} = \frac{1}{m+1} \left((-1)^j \frac{\partial w_{i_1 \dots i_m}}{\partial x^{3-j}} + \sum_{k=1}^m (-1)^{i_k} \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_m}}{\partial x^{3-i_k}} \right).$$

Напомним, что симметричное m -тензорное поле w называется *потенциальным*, если существует тензорное поле v такое, что $w = dv$. Тензорное поле w — *соленоидальное*, если его дивергенция равна нулю: $\delta w = 0$. Более того, известно [2], что существует ψ такое, что $w = (d^\perp)^m \psi$.

Будем рассматривать поля с ограниченным носителем, сосредоточенным внутри единичного круга B . Хорошо известно [3], что любое симметричное m -тензорное поле w может быть единственным образом разложено на сумму $w = {}^s w + dv$ соленоидальной ${}^s w$ и потенциальной частей $dv, v|_{\partial B} = 0$. Существует [2] более детальное разложение

$$w = (d^\perp)^m \psi + \sum_{j=1}^m (d^\perp)^{m-j} d^j \varphi^{(j)}, \quad \psi, \varphi^{(j)} \in H^m(B), \quad 1 \leq j \leq m.$$

Это разложение единственное при наложении граничных условий на потенциалы.

Основные результаты. Приведем некоторые свойства операторов $\mathcal{P}_{km}^{(j)}$.

Лемма 1. Для произвольного $k \geq 0$ и функции $\varphi \in H^m(B)$ имеют место следующие связи между лучевыми преобразованиями $\mathcal{P}_{k,m}^{(j)}$ момента k (для $0 \leq l \leq m$):

$$\mathcal{P}_{k,m}^{(0)} d^l (d^\perp)^{m-l} \varphi = (-1)^l \mathcal{P}_{k,m}^{(m)} d^{m-l} (d^\perp)^l \varphi,$$

$$\mathcal{P}_{k,m}^{(l)} (d^\perp)^m \varphi = \mathcal{P}_{k,m}^{(m)} d^{m-l} (d^\perp)^l \varphi, \quad \mathcal{P}_{k,m}^{(l)} d^m \varphi = (-1)^{m-l} \mathcal{P}_{k,m}^{(m)} d^l (d^\perp)^{m-l} \varphi.$$

Лемма дает связи между продольными и поперечными лучевыми преобразованиями моментов. Для смешанных лучевых преобразований связи приведены только для полей вида $d^m \varphi$ и $(d^\perp)^m \varphi$. Для других типов полей связи имеют более сложный вид. Например, при $m = 2$ имеем равенство $\mathcal{P}_{k,2}^{(1)} d d^\perp \varphi = \frac{1}{2} (\mathcal{P}_{k,2}^{(2)} d^2 \varphi - \mathcal{P}_{k,2}^{(2)} (d^\perp)^2 \varphi)$. Следовательно, можно исследовать только один из типов операторов, например, поперечные лучевые преобразования моментов.

Лемма 2. Для поля $d^{m-l}(d^\perp)^l\varphi$ с потенциалом $\varphi \in H_0^m(B)$ имеют место следующие связи между поперечными лучевыми преобразованиями:

$$\mathcal{P}_{k,m}^{(m)} d^{m-l}(d^\perp)^l\varphi = \begin{cases} 0, & p > k, \\ \frac{k!}{(k-p)!} \mathcal{P}_{k-p,m-p}^{(m-p)} d^{m-l}(d^\perp)^{l-p}\varphi, & p \leq k, \end{cases} \quad \text{где } 1 \leq p \leq l,$$

$$\mathcal{P}_{k,m}^{(m)} d^{m-l}(d^\perp)^l\varphi = \frac{\partial^q}{\partial s^q} (\mathcal{P}_{k,m-q}^{(m-q)} d^{m-l-q}(d^\perp)^l\varphi), \quad \text{где } 1 \leq q \leq m-l.$$

С использованием Леммы 2 и результатов работы [2], установлены связи поперечных лучевых преобразований моментов $\mathcal{P}_{k,m}^{(m)}$, $0 \leq k \leq m$ и хорошо изученных операторов преобразования Радона $\mathcal{R}$ и лучевых преобразований $\mathcal{P}_{0,m}^{(j)}$, $0 \leq j \leq m$. Приведем результаты для случая $m = 3$.

Теорема 1. Для потенциала $\varphi \in H_0^3(B)$ имеют место следующие связи поперечных лучевых преобразований $\mathcal{P}_{k,3}^{(3)}$, $0 \leq k \leq 3$ и преобразования Радона $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{k,3}^{(3)} d^{3-j}(d^\perp)^j\varphi &= 0, & 0 \leq k < j \leq 3, \\ \mathcal{P}_{k,3}^{(3)} d^{3-k}(d^\perp)^k\varphi &= k! \frac{\partial^{3-k}}{\partial s^{3-k}} (\mathcal{R}\varphi), & 0 \leq k \leq 3, \\ \mathcal{P}_{k,3}^{(3)} d^{4-k}(d^\perp)^{k-1}\varphi &= -k! \frac{\partial^{4-k}}{\partial s^{3-k} \partial \theta} (\mathcal{R}\varphi), & 1 \leq k \leq 3, \\ \mathcal{P}_{k,3}^{(3)} d^{5-k}(d^\perp)^{k-2}\varphi &= \frac{k!}{2} \frac{\partial^{3-k}}{\partial s^{3-k}} \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} (\mathcal{R}\varphi) - (\mathcal{R}\varphi) - s \frac{\partial}{\partial s} (\mathcal{R}\varphi) \right), & 2 \leq k \leq 3, \\ \mathcal{P}_{3,3}^{(3)} d^3\varphi &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} (\mathcal{R}\varphi) + 5(\mathcal{R}\varphi) + 3s \frac{\partial}{\partial s} (\mathcal{R}\varphi) \right). \end{aligned}$$

Теорема 2. Для симметричного 3-тензорного поля $\mathbf{w} = d^3\varphi + d^2 d^\perp \chi + d(d^\perp)^2 \psi + (d^\perp)^3 \phi$ с потенциалами $\varphi, \chi, \psi, \phi \in H_0^3(B)$ имеют место следующие связи между поперечными лучевыми преобразованиями моментов $\mathcal{P}_{k,3}^{(3)}$, $0 \leq k \leq 3$ и лучевыми преобразованиями $\mathcal{P}_{0,3}^{(j)}$, $0 \leq j \leq 3$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{0,3}^{(3)} d^3\varphi &= \mathcal{P}_{0,3}^{(3)} \mathbf{w}, & \mathcal{P}_{0,3}^{(2)} d^2 d^\perp \chi &= \frac{1}{3} ((\mathcal{P}_{1,3}^{(3)} \mathbf{w})'_s + (\mathcal{P}_{0,3}^{(3)} \mathbf{w})'_\theta), \\ \mathcal{P}_{0,3}^{(1)} d(d^\perp)^2 \psi &= \frac{1}{6} ((\mathcal{P}_{2,3}^{(3)} \mathbf{w})''_{ss} + 2(\mathcal{P}_{1,3}^{(3)} \mathbf{w})''_{s\theta} + (\mathcal{P}_{0,3}^{(3)} \mathbf{w})''_{\theta\theta} + 4\mathcal{P}_{0,3}^{(3)} \mathbf{w} + s(\mathcal{P}_{0,3}^{(3)} \mathbf{w})'_s), \\ \mathcal{P}_{0,3}^{(0)} (d^\perp)^3 \phi &= \frac{1}{6} ((\mathcal{P}_{3,3}^{(3)} \mathbf{w})'''_{sss} + 3(\mathcal{P}_{2,3}^{(3)} \mathbf{w})'''_{ss\theta} + 3(\mathcal{P}_{1,3}^{(3)} \mathbf{w})'''_{\theta\theta} + 12\mathcal{P}_{1,3}^{(3)} \mathbf{w} + 3s(\mathcal{P}_{1,3}^{(3)} \mathbf{w})'_s \\ &\quad + (\mathcal{P}_{0,3}^{(3)} \mathbf{w})'''_{\theta\theta\theta} + 10(\mathcal{P}_{0,3}^{(3)} \mathbf{w})'_\theta + 3s(\mathcal{P}_{0,3}^{(3)} \mathbf{w})''_{s\theta}). \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 24-21-00200).

Литература

1. Деревцов Е. Ю. Лучевые преобразования моментов планарных тензорных полей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2023. Т. 26, № 3. С. 26-41.
2. Derevtsov E.Yu., Svetov I.E. Tomography of tensor fields in the plain // Eurasian journal of mathematical and computer applications. 2015. V. 3, No. 2. P. 24-68.
3. Шарафутдинов В.А. Интегральная геометрия тензорных полей. Н., Наука. 1993.

Дата поступления в оргкомитет: 07.09.2025

ВЕСОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА ТРЕХМЕРНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ 2-ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

И.Е. Светов^{1,2}

к.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: svetovie@mail.ru, SPIN-код: 5892-3956

А.П. Полякова^{1,2}

к.ф.-м.н., н.с., e-mail: apolyakova@math.nsc.ru, SPIN-код: 5271-1188

¹Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Аннотация. В работе установлены связи весовых преобразований Радона, действующих на симметричные 2-тензорные поля в $\mathbb{R}^3$, и преобразования Радона их потенциалов.

Ключевые слова: Интегральная геометрия, разложение тензорного поля, весовое преобразование Радона.

Предварительные сведения. В настоящей работе впервые исследуются весовые преобразования Радона симметричных 2-тензорных полей в $\mathbb{R}^3$. Важную роль в исследовании играет детальное разложение 2-тензорных полей, полученное в [1].

Оператор внутреннего дифференцирования $d : H^k(S^m) \rightarrow H^{k-1}(S^{m+1})$ является композицией операторов ковариантного дифференцирования ∇ и симметризации σ и действует на функцию f и векторное поле $\mathbf{v}$ по формулам

$$(df)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (d\mathbf{v})_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

В работах [1, 2] введены и исследованы обобщения оператора rot . Операторы $\text{rot}_i : H^k(S^m) \rightarrow H^{k-1}(S^{m+1})$, $i = 1, 2, 3$ действуют на потенциал φ по формулам

$$\text{rot}_1 \varphi = \text{rot}(\varphi, 0, 0), \quad \text{rot}_2 \varphi = \text{rot}(0, \varphi, 0), \quad \text{rot}_3 \varphi = \text{rot}(0, 0, \varphi).$$

Применение этих операторов к векторному или тензорному полю $\mathbf{u} \in H^k(S^m)$, $m \geq 1$ определяется правилами $\text{rot}_i \mathbf{u} = \sigma \mathbf{v}$, $i = 1, 2, 3$, где компоненты поля $\mathbf{v}$ задаются формулами $v_{j_1 \dots j_{m+1}} = (\text{rot}_i(u_{j_1 \dots j_m}))_{j_{m+1}}$, $j_1, \dots, j_{m+1} = 1, 2, 3$. Действия операторов $\text{rot}^i : H^k(S^m) \rightarrow H^{k-2}(S^{m+1})$, $i = 1, 2, 3$ на потенциал φ являются композициями операторов rot_i и rot : $\text{rot}^i \varphi = \text{rot}(\text{rot}_i \varphi)$, $i = 1, 2, 3$. Применение на поле $\mathbf{w} \in H^k(S^m)$, $m \geq 1$ задается равенствами $\text{rot}^i \mathbf{w} = \sigma \mathbf{v}$, $i = 1, 2, 3$, где компоненты $\mathbf{v}$ вычисляются по правилам $v_{j_1 \dots j_{m+1}} = (\text{rot}^i(w_{j_1 \dots j_m}))_{j_{m+1}}$, $j_1, \dots, j_{m+1} = 1, 2, 3$. Операторы d , rot_i , rot^j , $i, j = 1, 2, 3$ перестановочны. Для повторного применения операторов rot_i , rot^j , $i, j = 1, 2, 3$ будем использовать обозначения $\text{rot}_{ij} \varphi = \text{rot}_i(\text{rot}_j \varphi)$, $\text{rot}_j^i \varphi = \text{rot}^i(\text{rot}_j \varphi)$, $\text{rot}^{ij} \varphi = \text{rot}^i(\text{rot}^j \varphi)$.

Известно, что произвольное m -тензорное поле $\mathbf{w}$ может быть единственным образом разложено в сумму $\mathbf{w} = {}^s \mathbf{w} + d\mathbf{u}$ соленоидального ${}^s \mathbf{w}$ ($\text{div } {}^s \mathbf{w} = 0$) и потенциального $d\mathbf{u}$ полей ($\mathbf{u} \rightarrow 0$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$). В [1, 2] показано, что соленоидальными являются симметричные 2-тензорные поля $\text{rot}_{ij} \varphi$, $\text{rot}_j^i \varphi$, $\text{rot}^{ij} \varphi$, $i, j = 1, 2, 3$.

Более того, для каждого фиксированного $i = 1, 2, 3$ для любого симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{w}$ существуют более детальные разложения. Именно, это поле может быть представлено в виде сумм

$$\mathbf{w} = d^2\varphi^{00} + d(\text{rot}_i\varphi^{01}) + d(\text{rot}^i\varphi^{02}) + \text{rot}_{ii}\varphi^{11} + \text{rot}_i^i\varphi^{12} + \text{rot}^{ii}\varphi^{22}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для единственности разложений, на потенциалы необходимо наложить дополнительные условия. Например, если $\mathbf{w} \in \mathcal{S}(S^2(\mathbb{R}^3))$, то потенциалы из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

Плоскость $P_{s,\xi}$ в $\mathbb{R}^3$ задается нормальным уравнением $(\xi \cdot x) - s = 0$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — единичный нормальный вектор плоскости, а s — расстояние (со знаком) от начала координат до плоскости. Точки на плоскости $P_{s,\xi}$ будем задавать равенством $x = s\xi + y$, $y \in \xi^\perp$, где $\xi^\perp$ — плоскость, перпендикулярная ξ и проходящая через начало координат. Преобразование Радона $\mathcal{R}f$ функции f задается формулой

$$\mathcal{R}f(s, \xi) = \int_{P_{s,\xi}} f(x) dx = \int_{\xi^\perp} f(s\xi + y) dy.$$

В настоящей работе мы рассматриваем интегральные операторы, являющиеся обобщением преобразования Радона. Там, где это будет удобно, для вектора ξ мы будем также использовать обозначение $\mathbf{e}^0$. Пусть $\mathbf{e}^1 = (e_1^1, e_2^1, e_3^1)$, $\mathbf{e}^2 = (e_1^2, e_2^2, e_3^2)$ — единичные взаимно ортогональные векторы, компланарные плоскости $\xi^\perp$. Обобщенные преобразования Радона $\mathcal{R}^{kl}$, $k, l = 0, 1, 2$, $k \leq l$ симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{w}$ задаются формулами

$$\mathcal{R}^{kl}\mathbf{w}(s, \xi) = \int_{P_{s,\xi}} \sum_{i,j=1}^3 e_i^k e_j^l w_{ij}(x) dx.$$

Свойства операторов $\mathcal{R}^{kl}$ исследовались в [1]. Для полного восстановления симметричного 2-тензорного поля в общем случае необходимо знать значения всех шести операторов $\mathcal{R}^{kl}$. В силу неоднозначности выбора системы векторов $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ операторы $\mathcal{R}^{kl}$ определяются неоднозначно. Для описания ядер и образов этих операторов в [1] использован один из наиболее естественных наборов $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$:

$$\mathbf{e}^1 = \frac{1}{\rho} (\xi_2, -\xi_1, 0), \quad \mathbf{e}^2 = \frac{1}{\rho} (\xi_1\xi_3, \xi_2\xi_3, -\rho^2), \quad \text{где } \rho = \sqrt{(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2}. \quad (1)$$

Лемма 1. Пусть $\varphi^{ij} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $i, j = 0, 1, 2$, $i \leq j$, тогда для полей

$$\Phi^{00} = d^2\varphi^{00}, \quad \Phi^{01} = d(\text{rot}_3\varphi^{01}), \quad \Phi^{02} = d(\text{rot}^3\varphi^{02}), \quad (2)$$

$$\Phi^{11} = \text{rot}_{33}\varphi^{11}, \quad \Phi^{12} = \text{rot}_3^3\varphi^{12}, \quad \Phi^{22} = \text{rot}^{33}\varphi^{22} \quad (3)$$

имеют место следующие равенства (для переменных s, ξ):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{00}\Phi^{00} &= (\mathcal{R}\varphi^{00})''_{ss}, & \mathcal{R}^{01}\Phi^{01} &= \frac{\rho}{2} (\mathcal{R}\varphi^{01})''_{ss}, & \mathcal{R}^{02}\Phi^{02} &= \frac{\rho}{2} (\mathcal{R}\varphi^{02})'''_{sss}, \\ \mathcal{R}^{11}\Phi^{11} &= \rho^2 (\mathcal{R}\varphi^{11})''_{ss}, & \mathcal{R}^{12}\Phi^{12} &= \frac{\rho^2}{2} (\mathcal{R}\varphi^{12})'''_{sss}, & \mathcal{R}^{22}\Phi^{22} &= \rho^2 (\mathcal{R}\varphi^{22})''''_{ssss} \end{aligned}$$

и $\mathcal{R}^{kl}\Phi^{ij} = 0$, где $k, l = 0, 1, 2$, $k \leq l$, если $k \neq i$ или $l \neq j$.

Основные результаты. В данной работе предлагается рассмотреть весовые преобразования Радона $\mathcal{W}_l^{kk}$, $k = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$, которые действуют на симметричное 2-тензорное поле $\mathbf{w}$ по правилам

$$\mathcal{W}_l^{kk}\mathbf{w}(s, \xi) = \int_{P_{s,\xi}} (x \cdot \mathbf{e}^l) \left(\sum_{i,j=1}^3 e_i^k e_j^k w_{ij}(x) \right) dx, \quad k = 0, 1, 2, \quad l = 1, 2.$$

Для описания ядер и образов весовых преобразований Радона $\mathcal{W}_l^{kk}$, $k = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$ тензорных полей рассмотрим набор $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$, задаваемый формулами (1). В сферической системе координат ($\alpha \in [0, 2\pi)$, $\beta \in (0, \pi)$) имеем

$$\begin{aligned}\xi = \mathbf{e}^0 &= (\cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \beta), & \mathbf{e}^1 &= (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0), \\ \mathbf{e}^2 &= (\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \cos \beta, -\sin \beta), & \rho &= \sin \beta.\end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть базис $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ на плоскости интегрирования задается формулами (1) и $\varphi^{ij} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $i, j = 0, 1, 2$, $i \leq j$, тогда для полей (2), (3) имеют место следующие равенства (для переменных $s, \xi(\alpha, \beta)$):

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_1^{00}\Phi^{00} &= \frac{1}{\sin \beta}(\mathcal{R}\varphi^{00})''_{s\alpha}, & \mathcal{W}_1^{00}\Phi^{01} &= \sin \beta(\mathcal{R}\varphi^{01})'_s, \\ \mathcal{W}_1^{00}\Phi^{02} &= \mathcal{W}_1^{00}\Phi^{11} = \mathcal{W}_1^{00}\Phi^{12} = \mathcal{W}_1^{00}\Phi^{22} = 0; \\ \mathcal{W}_2^{00}\Phi^{00} &= -(\mathcal{R}\varphi^{00})''_{s\beta}, & \mathcal{W}_2^{00}\Phi^{02} &= \sin \beta(\mathcal{R}\varphi^{02})''_{ss}, \\ \mathcal{W}_2^{00}\Phi^{01} &= \mathcal{W}_2^{00}\Phi^{11} = \mathcal{W}_2^{00}\Phi^{12} = \mathcal{W}_2^{00}\Phi^{22} = 0; \\ \mathcal{W}_1^{11}\Phi^{01} &= -\sin \beta(\mathcal{R}\varphi^{01})'_s, & \mathcal{W}_1^{11}\Phi^{00} &= \mathcal{W}_1^{11}\Phi^{02} = \mathcal{W}_1^{11}\Phi^{22} = 0, \\ \mathcal{W}_1^{11}\Phi^{11} &= \sin \beta(\mathcal{R}\varphi^{11})''_{s\alpha}, & \mathcal{W}_1^{11}\Phi^{12} &= -\sin \beta \cos \beta(\mathcal{R}\varphi^{12})''_{ss}; \\ \mathcal{W}_2^{11}\Phi^{00} &= \mathcal{W}_2^{11}\Phi^{01} = \mathcal{W}_2^{11}\Phi^{02} = \mathcal{W}_2^{11}\Phi^{12} = \mathcal{W}_2^{11}\Phi^{22} = 0, \\ \mathcal{W}_2^{11}\Phi^{11} &= -(\sin^2 \beta(\mathcal{R}\varphi^{11})'_s)'_{\beta}; \\ \mathcal{W}_1^{22}\Phi^{00} &= \mathcal{W}_1^{22}\Phi^{01} = \mathcal{W}_1^{22}\Phi^{02} = \mathcal{W}_1^{22}\Phi^{11} = 0, \\ \mathcal{W}_1^{22}\Phi^{12} &= \sin \beta \cos \beta(\mathcal{R}\varphi^{12})''_{ss}, & \mathcal{W}_1^{22}\Phi^{22} &= \sin \beta(\mathcal{R}\varphi^{22})''''_{sss\alpha}; \\ \mathcal{W}_2^{22}\Phi^{00} &= \mathcal{W}_2^{22}\Phi^{01} = \mathcal{W}_2^{22}\Phi^{11} = \mathcal{W}_2^{22}\Phi^{12} = 0, \\ \mathcal{W}_2^{22}\Phi^{02} &= -\sin \beta(\mathcal{R}\varphi^{02})''_{ss}, & \mathcal{W}_2^{22}\Phi^{22} &= -(\sin^2 \beta(\mathcal{R}\varphi^{22})''''_{sss})'_{\beta}.\end{aligned}$$

Заключение. Очевидно, что значения операторов $\mathcal{W}_l^{kk}$, $k = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$, (за исключением $\mathcal{W}_2^{11}$) дают больше информации об исследуемом поле нежели операторы $\mathcal{R}^{kl}$, $k, l = 0, 1, 2$, $k \leq l$. Используя результаты Теоремы 1, установлены наборы данных, по которым возможно восстановление 2-тензорного поля $\mathbf{w}$. Например, восстановление поля $\mathbf{w} \in \mathcal{S}(S^2)$ возможно по следующим данным:

$$\begin{aligned}\{\mathcal{R}^{00}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{11}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{22}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{00}\mathbf{w}, \mathcal{W}_2^{00}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{22}\mathbf{w}\}, \\ \{\mathcal{R}^{00}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{11}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{22}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{11}\mathbf{w}, \mathcal{W}_2^{00}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{22}\mathbf{w}\}, \\ \{\mathcal{R}^{00}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{11}\mathbf{w}, \mathcal{R}^{22}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{00}\mathbf{w}, \mathcal{W}_2^{00}\mathbf{w}, \mathcal{W}_1^{11}\mathbf{w}\}.\end{aligned}$$

Более того, в указанных наборах данных вместо $\mathcal{W}_2^{00}\mathbf{w}$ можно использовать $\mathcal{W}_2^{22}\mathbf{w}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00200).

Литература

1. Svetov I.E., Polyakova A.P. Inversion of generalized Radon transforms acting on 3D vector and symmetric tensor fields // Inverse Problems. 2024. V. 40, N. 1. Art. no. 015009.
2. Светов И.Е., Полякова А.П. Разложение симметричных тензорных полей в $\mathbb{R}^3$. // Сибирский журнал индустриальной математики. 2023. Т. 26, No. 1. С. 161-178.

Дата поступления в оргкомитет: 07.09.2025

ОБ УРАВНЕНИИ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

М.С. Сгибнев

к.ф.-м.н., e-mail: sgibnev@math.nsc.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия

Аннотация. При определенных условиях уравнение Вольтерра первого рода может быть сведено к уравнению Вольтерра второго рода. К последнему уравнению можно применить вероятностную теорию восстановления. Сочетание двух подходов дает интересные результаты об асимптотическом поведении для решения исходного уравнения Вольтерра первого рода.

Ключевые слова: Уравнение Вольтерра первого рода, асимптотическое поведение, скорость сходимости, теория восстановления, полумультипликативная функция, банахова алгебра.

1. Введение

Уравнение Вольтерра первого рода с ядром $k(x - y)$, зависящим от разности аргументов, имеет вид

$$\int_0^x k(x - y)z(y) dy = f(x), \quad x \geq 0, \quad (1)$$

где функции $k(x)$ и $f(x)$ имеют непрерывные производные, $f(0) = 0$, $k'(x) \leq 0$, $k(0) = 1$, $\int_0^\infty |k'(x)| dx = 1$. Дифференцируя (1), приходим к уравнению

$$z(x) + \int_0^x k'(x - y)z(y) dy = f'(x), \quad x \geq 0, \quad (2)$$

которое в теории вероятностей известно как «уравнение восстановления», так как при сделанных предположениях функция $p(x) := -k'(x)$, $x \geq 0$, — плотность распределения вероятностей с функцией распределения $F(x) := 1 - k(x)$, $x \geq 0$. Перепишем (2) в виде

$$z(x) = \int_0^x p(x - y)z(y) dy + g(x), \quad x \geq 0, \quad (3)$$

где $g(x) := f'(x)$. Пусть $h(x) := \sum_{n=1}^\infty p^{n*}(x)$ — «плотность восстановления», где $p^{n*}(x)$ — n -кратная свертка плотности $p(x)$: $p^{1*}(x) := p(x)$, $p^{(n+1)*}(x) := \int_0^x p^{n*}(x -$

$y)p(y) dy$, $n \geq 1$. Известно, что уравнение (3) допускает в $(0, \infty)$ непрерывное решение и притом единственное. С другой стороны, функция $z(x) := g(x) + \int_0^x g(x-y)h(y) dy$ является решением уравнения (3), притом *непрерывным*. Следовательно, $z(x)$ – решение исходного уравнения (1).

2. Асимптотика решения

Сформулируем асимптотический результат о поведении решения $z(x)$ при $x \rightarrow \infty$ для функций $g(x)$, непосредственно интегрируемых по Риману.

Определение 1. Пусть на множестве $[0, \infty)$ задана функция $g(x)$. При фиксированном $h > 0$ обозначим через $\underline{m}_n$ и $\overline{m}_n$, соответственно, минимум и максимум $g(x)$ на $[(n-1)h, nh]$. Предположим, что ряды $\underline{\sigma} = h \sum \underline{m}_n$ и $\overline{\sigma} = h \sum \overline{m}_n$ сходятся абсолютно. Условимся говорить, что функция $g(x)$ является «непосредственно интегрируемой по Риману», если для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малом h $\overline{\sigma} - \underline{\sigma} < \varepsilon$. Общий предел сумм $\underline{\sigma}$ и $\overline{\sigma}$ при $h \rightarrow 0$ называется интегралом функции $g(x)$ от 0 до ∞ :

$$\int_0^\infty g(x) dx := \lim_{h \rightarrow 0} \underline{\sigma} = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\sigma}.$$

Монотонная функция непосредственно интегрируема тогда и только тогда, когда она интегрируема в обычном смысле. Для $c \in \mathbb{R}$ полагаем отношение c/∞ равным нулю.

Теорема 1. Предположим, что функция $g(x) = f'(x)$, $x \geq 0$, непосредственно интегрируема по Риману. Тогда решение $z(x)$ уравнения (1) обладает следующим асимптотическим свойством:

$$z(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} z(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty g(x) dx = \frac{f(\infty)}{\mu},$$

где $\mu := \int_0^\infty xp(x) dx = \int_0^\infty k(x) dx \in (0, \infty]$ и $f(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

3. Скорость сходимости

В этом разделе устанавливается скорость сходимости решения $z(x)$ к $z(\infty)$.

Определение 2. Заданная на $(0, \infty)$ положительная функция L называется «медленно меняющейся на бесконечности» в том и только в том случае, когда она удовлетворяет условию

$$\frac{L(tx)}{L(t)} \rightarrow 1 \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

для любого $x > 0$. Функция τ называется «правильно меняющейся на бесконечности» с показателем ϱ в том и только в том случае, когда для нее выполняется представление

$$\tau(x) = x^\varrho L(x),$$

где $-\infty < \varrho < \infty$ и функция L медленно меняется на бесконечности.

Замечание 1. Запись $\tau(x) = x^\alpha L(x)$ дает наглядное представление о поведении функции $\tau(x)$ только на бесконечности. Считаем, для определенности, что функция $\tau(x)$ равна положительной постоянной на некотором отрезке $[0, A]$.

Обозначим $\hat{q}(s) := \int_0^\infty e^{sx} q(x) dx$. Положим

$$P_\tau(q) := \sup_{x \geq 0} |q(x)| \exp(\gamma x) / \tau(x),$$

$$\mathcal{A} := \left\{ q : \hat{q}(\gamma) < \infty, \quad P_\tau(q) < \infty, \quad \exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q(x) \exp(\gamma x)}{\tau(x)} =: \mathcal{L}(q) \right\}.$$

Пусть $\int_0^\infty e^{\gamma x} p(x) dx < \infty$ при некотором $\gamma \geq 0$. В дальнейшем предполагаем, что в полуплоскости $\{s \in \mathbb{C} : \Re s \leq \gamma\}$ нет корней уравнения $\hat{p}(s) - 1 = 0$, отличных от нуля. При $\gamma = 0$ это условие автоматически выполнено, так как характеристическая функция $\hat{p}(it)$, $t \in \mathbb{R}$, абсолютно непрерывного распределения вероятностей с плотностью $p(x)$ отлична от единицы при $t \neq 0$. Запись $f(x) \sim cg(x)$, $x \rightarrow \infty$, означает $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = c$. Обозначим $K(x) := \int_x^\infty k(y) dy$.

Теорема 2. Пусть $\tau(x) = x^\alpha L(x)$ при $\alpha \leq -1$. Предположим, что $\gamma > 0$, $\hat{p}(\gamma)$, $|\hat{g}|(\gamma) < \infty$, $p, g, K \in \mathcal{A}$ и

$$p(x) \sim \mathcal{L}(p) \frac{x^\alpha L(x)}{e^{\gamma x}}, \quad g(x) \sim \mathcal{L}(g) \frac{x^\alpha L(x)}{e^{\gamma x}} \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Тогда $z(x) = f(x)/\mu + r(x)$, где

$$r(x) \sim \left\{ \frac{\mathcal{L}(g)}{1 - \hat{p}(\gamma)} + \frac{\hat{g}(\gamma) \mathcal{L}(p)}{[1 - \hat{p}(\gamma)]^2} \right\} \frac{x^\alpha L(x)}{e^{\gamma x}} \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Если $\gamma = 0$, интегралы $\int_0^\infty x k(x) dx$, $\int_0^\infty |f'(x)| dx$ конечны и при $x \rightarrow \infty$

$$k'(x) = o(x^\alpha L(x)), \quad f'(x) \sim \mathcal{L}(f') x^\alpha L(x), \quad K(x) = \int_x^\infty k(y) dy \sim \mathcal{L}(K) x^\alpha L(x),$$

то

$$r(x) \sim \left[\frac{\mathcal{L}(f')}{\mu^2} \int_0^\infty x k(x) dx + \frac{f(\infty) \mathcal{L}(K)}{\mu^2} \right] x^\alpha L(x) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Замечание 2. В теореме 2 мы ограничились – ради простоты и наглядности – применением показательных и правильно меняющихся функций. Более общие асимптотические результаты можно найти в статьях [1] и [2].

Литература

1. Сгибнев М.С. О решении уравнения Вольтерра первого рода // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 5. С. 663–670.
2. Sgibnev M.S. On the Solution of a Volterra Equation of the First Kind // Differential Equations. 2015. V. 51, No. 5. P. 1–9.

Дата поступления в оргкомитет: 05.09.2025

ОДИН ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД К ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ КАЛЬДЕРОНА

К.В. Сторожук

д.ф.-м.н., доцент, e-mail: stork931@gmail.com

В.А. Шарафутдинов

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: sharafut@list.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россию

Аннотация. Для компактного риманова многообразия (M, g) с краем ∂M оператор Дирихле-Неймана $\Lambda_g : C^\infty(\partial M) \rightarrow C^\infty(\partial M)$ определяется формулой $\Lambda_g f = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial M}$, где ν — единичный вектор внешней нормали к краю, а u — решение задачи Дирихле $\Delta_g u = 0$, $u|_{\partial M} = f$. Пусть g_∂ — риманова метрика на ∂M , индуцированная g . Задача Кальдерона формулируется следующим образом: в какой степени (M, g) определяется данными $(\partial M, g_\partial, \Lambda_g)$? Мы предлагаем подход к численному решению двумерной задачи Кальдерона для односвязных поверхностей.

Ключевые слова: Оператор Дирихле-Неймана, задача Кальдерона.

Пусть (M, g) — C^∞ компактное связное риманово многообразие с непустым краем ∂M и g_∂ — риманова метрика на ∂M , индуцированная g .

Оператор Дирихле-Неймана $\Lambda_g : C^\infty(\partial M) \rightarrow C^\infty(\partial M)$ определяется так: $\Lambda_g f = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial M}$, где ν — вектор внешней нормали к краю, u — решение краевой задачи для оператора Лапласа — Бельтрами $\Delta_g u = 0$ на M , $u|_{\partial M} = f$.

В обратной задаче многообразие $(\partial M, g_\partial)$ и оператор Λ_g предполагаются известными, нужно восстановить (M, g) по данным $(\partial M, g_\partial, \Lambda_g)$. Эта задача называется *геометрической задачей электроимпедансной томографии* в [2] и *задачей Кальдерона* в [1]. В задаче имеется очевидная неединственность с точностью до изометрий, сохраняющих край. В двумерном случае неединственность другого вида связана с конформной инвариантностью оператора Лапласа — Бельтрами. В остальном решение однозначно, для односвязных поверхностей элементарное доказательство имеется в [2]. В этом случае достаточно рассмотреть ситуацию односвязной, возможно, многолистной плоской области.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ — плоская область, ограниченная простой замкнутой гладкой кривой $\Gamma = \partial\Omega$ с евклидовой метрикой и $\Lambda_\Omega : C^\infty(\Gamma) \rightarrow C^\infty(\Gamma)$ — DN-отображение области Ω . Ориентируем стандартно граничную кривую Γ , пусть γ — ее натуральная параметризация. Саму функцию γ можно рассматривать как диффеоморфизм $\gamma : \mathbb{S} \rightarrow \Gamma$, сохраняющий длину и ориентацию, определен перенос оператора $\Lambda_\gamma = \gamma^* \Lambda_\Omega \gamma^{*-1} : C^\infty(\mathbb{S}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{S})$. Значение оператора Λ_γ для функции $\gamma \in C^\infty(\mathbb{S})$ оказывается равным $\Lambda_\gamma \gamma = -i \frac{d\gamma}{ds}$. Пусть J — оператор интегрирования

вдоль Γ , J обратен $\frac{\partial}{\partial s}$. Положим $\mathcal{H}_\Gamma := iJ\Lambda_\Omega : C^\infty(\Gamma) \rightarrow C^\infty(\Gamma)$. Назовем оператор

$$\mathcal{H}_\gamma := iJ\Lambda_\gamma = \gamma^* \mathcal{H}_\Gamma \gamma^{*-1} : C^\infty(\mathbb{S}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{S})$$

преобразованием Гильберта кривой γ . Нам нужно найти решение системы

$$\mathcal{H}_\gamma \gamma = \gamma, \quad \left| \frac{d\gamma(s)}{ds} \right| = 1,$$

имеющее нулевое среднее значение, соответствующее несамопересекающейся кривой, оно единственно с точностью до умножения на константу α , $|\alpha| = 1$.

Для коэффициентов Фурье функции $\gamma = \gamma(s) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{\gamma}_m e^{ims}$ условие натуральности параметра для $\gamma(s)$ превращается в систему уравнений

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |\hat{\gamma}_n|^2 = 1, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} n(n+k) \hat{\gamma}_n \overline{\hat{\gamma}_{n+k}} = 0 \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Уравнение $\mathcal{H}_\gamma \gamma = \gamma$ эквивалентно соотношениям ($H = h_{mn}$ — соответствующее матричное представление оператора Гильберта в гильбертовом базисе) $\sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{mn} \hat{\gamma}_m = \hat{\gamma}_n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Пример: когда область Ω совпадает с единичным кругом, отображение $\gamma : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}$ — тождественное вложение и $\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ins}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) являются собственными векторами $\mathcal{H}$, а H — диагональной матрицей $\text{diag}(\dots, -1, -1, 0, 1, 1, \dots)$. В классе вложенных областей, натурально параметризованных на границе, решение единственно: $\gamma(s) = e^{is}$.

В нашем численном методе восстановления кривой γ по матрице оператора Гильберта H_γ мы берем «обрезанную» матрицу $H_\gamma = (h_{mn})_{m,n=-N}^N$. Для коэффициентов Фурье функции γ решаем конечную систему уравнений

$$\sum_{m=-N}^N m^2 |\hat{\gamma}_m|^2 = 1, \quad \sum_{m=-N}^{N-k} m(m+k) \hat{\gamma}_m \overline{\hat{\gamma}_{m+k}} = 0 \quad (1 \leq k < N).$$

Наш алгоритм сводится к нахождению подпространства собственных векторов заданной матрицы H , отвечающих собственному значению $+1$ и нахождению в этом пространстве решения системы квадратичных уравнений.

При этом нужно выбрать решения, такие, что кривая $s \mapsto \gamma(s)$ не имеет самопересечений. Вопрос сходимости алгоритма и его погрешности мы не исследовали, однако в случаях, исследованных нами, он всегда работал и сходил быстро, примерно как метод Ньютона. Опишем алгоритм.

Пусть $T_1, \dots, T_{N-1}$ — эрмитовы (предположим, что вещественные) квадратичные формы и L — N -мерное подпространство в $\mathbb{R}^{2N+1}$ (в нашем случае это подпространство, отвечающее собственному числу 1 матрицы H). Опишем итерационный алгоритм, которым мы вычисляли вектор $\gamma \in L$, на котором зануляются формы T_i :

$$\langle T_1 \gamma, \gamma \rangle = 0, \langle T_2 \gamma, \gamma \rangle = 0, \dots, \langle T_{N-1} \gamma, \gamma \rangle = 0. \quad (*)$$

Шаг 1). Выберем базис $e_1, e_2, \dots, e_{N-1}, e_N$ пространства L . Вектор e_N возьмем за первое приближение решения: $\gamma_1 := e_N$.

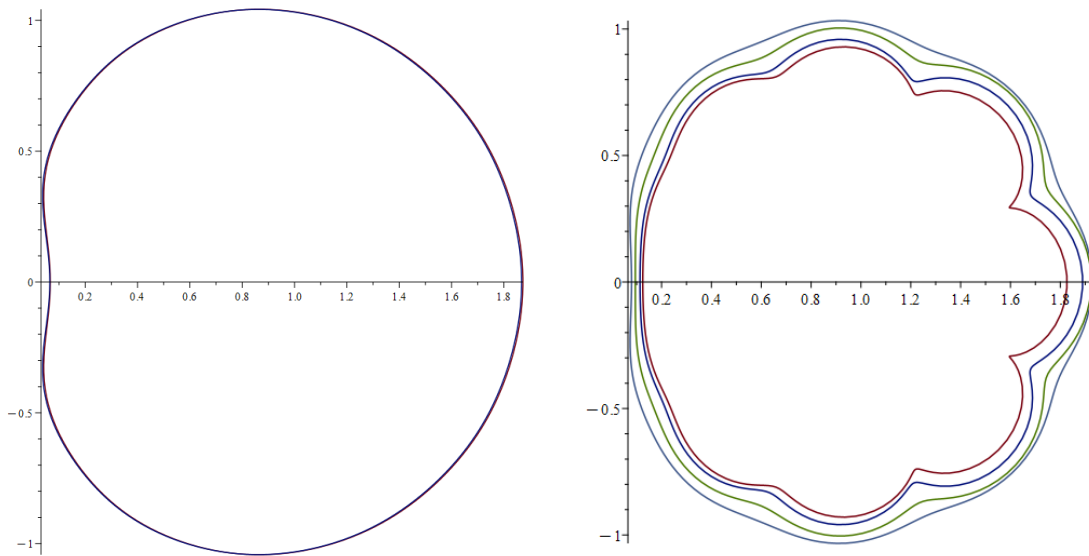


Рис. 1: Исходная кривая $z = C \cdot (e^{it} + 1.5)^2$ и ее первые четыре приближения

Шаг 2). Следующее приближение γ_2 ищем в виде $\gamma_1 + \varepsilon_1$, где вектор ε_1 выбираем в виде линейной комбинации базисных векторов $e_1, \dots, e_{n-1}$. Подставим в систему уравнений (*) вектор γ_1 :

$$\langle T_i \gamma_2, \gamma_2 \rangle = \langle T_i \gamma_1 + \varepsilon_1, \gamma_1 + \varepsilon_1 \rangle = \langle T_i, \gamma_1 \rangle + 2\langle T_i \gamma_1, \varepsilon_1 \rangle + \langle T_i \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle = 0, i = 1 \dots N-1.$$

Линеаризуем эту систему, получится $\langle T_i \gamma_1, \gamma_1 + 2\varepsilon_1 \rangle = 0, i = 1 \dots, N$. Иными словами, мы выбираем вектор ε_1 так, чтобы вектор $\gamma_1 + 2\varepsilon_1$ был ортогонален всем векторам $T_1 \gamma_1, \dots, T_{N-1} \gamma_1$. Такая система по вектору ε_1 не квадратична, а линейна и легко решается в явном виде.

Шаг 3). Теперь ищем следующее приближение аналогичным образом: $\gamma_3 = \gamma_2 + \varepsilon_2$, где ε_2 — линейная комбинация векторов $e_1, \dots, e_{N-1}$, снова находящаяся из условия ортогональности вектора $\gamma_2 + 2\varepsilon_2$ всем векторам $T_1 \gamma_2, \dots, T_{N-1} \gamma_2$.

В пределе после нормировки получится искомый вектор коэффициентов Фурье функции граничной кривой γ . На рисунке показаны первые 4 итерации для примера кривой $z = C \cdot (e^{it} + 1.5)^2$ для $N = 12$. Седьмая итерация в масштабе рисунка уже визуально неотличима от исходной кривой.

Литература

1. Belishev M.I. The Calderón problem for two-dimensional manifolds by the BC-method // SIAM J. Math. Anal. 2003. V. 35, No. 1. P. 172–182.
2. Sharafutdinov V. The geometrical problem of electrical impedance tomography in the disc // Siberian Math. J. 2011. V. 52, No. 1.

Дата поступления в оргкомитет: 07.09.2025

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК СО СМЕШАННЫМИ СТАТИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ

Д.С. Климентов¹

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: dklimentov75@gmail.com

Е.В. Тюриков²

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: Angen2013@yandex.ru

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

²Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

Аннотация. В настоящей заметке предлагается математическая модель состояния равновесия так называемой обобщенной сферической оболочки с кусочно-гладкой боковой поверхностью при статическом граничном условии смешанного типа. Установлено существование угловых точек границы срединной поверхности, для которых единственной адекватной математической моделью является вероятностная модель.

Ключевые слова: выпуклая оболочка, задача Римана-Гильберта, квазикорректность, квазистойчивость.

Рассмотренные ниже вопросы восходят к работам И.Н. Векуа [1] и А.Н. Гольденвейзера [2], положивших начало широкому применению методов комплексного анализа к безмоментной (мембранной) теории тонких упругих оболочек. Один из вариантов теории выпуклых оболочек с гладкими боковыми поверхностями был разработан И.Н. Векуа [1] с применением методов граничных задач для обобщённых аналитических функций. Там же, в рамках технической теории, была поставлена задача о реализации состояния напряжённого равновесия при выполнении статического граничного условия так называемого смешанного типа для оболочки с односвязной срединной поверхностью. Сюда же следует отнести попытку [3] постановки статической задачи для оболочки с кусочно-гладкой границей срединной поверхности. В дальнейшем, в работах одного из авторов [4] каждая из указанных задач в дискретизированной постановке рассматривалась как частный случай модифицированной задачи Римана–Гильберта с разрывным коэффициентом граничного условия для обобщённой аналитической функции в плоской области с кусочно-гладкой границей. Полное решение этой задачи в терминах индекса коэффициента граничного условия было дано ранее [5]. Принципиальное отличие случая разрывного условия от гладкого состоит в том, что в разрывном случае возможна безусловная разрешимость статической граничной задачи и, как следствие, неединственность решения. Это обстоятельство позволяет дать описание состояния равновесия с использованием такого параметра, как показатель квазикорректности соответствующего решения [1] (число произвольных вещественных параметров, входящих в решение), а

также понятия квазистойчивости (т.е. инвариантности показателя квазикорректности относительно подходящего векторного параметра, входящего в граничное условие).

Пусть S – односвязная поверхность положительной гауссовой кривизны класса регулярности с кусочно-гладким краем $L = \cup_{j=1}^{2n} L_j$ и угловыми точками p_j с внутренними углами ν_j , $0 < \nu_j < \pi$ ($j = \overline{1, 2n}$), называемая далее *куполом*. Для упрощения изложения полагаем, что в каждой угловой точке направление одной из дуг совпадает с одним из главных направлений на поверхности в этой точке. В этом случае поверхность S назовём каноническим куполом K .

Зададим на S вдоль L кусочно-непрерывное векторное поле $r = \{\alpha(s), \beta(s)\}$, допускающее разрывы первого рода в точках p_j , где $\alpha(s), \beta(s)$ ($\alpha^2 + \beta^2 = 1, \beta \geq 0$) – касательная и нормальная составляющие, s – натуральный параметр, и обозначим через J заданный в [1] гомеоморфизм поверхности S на комплексную плоскость $z = x + iy$. Пусть область $D = J(S)$ – образ поверхности при отображении на плоскость z с границей Γ и угловыми точками $q_i = J(p_i)$. Рассмотрим следующую задачу (задача R): найти в области D комплекснозначное решение $w(z)$ уравнения

$$w_{\bar{z}} - B(z)\bar{w}(z) = F(z), z \in D, \quad (1)$$

удовлетворяющее уравнению Римана–Гильберта

$$Re\{\lambda(\zeta)\bar{w}(\zeta)\} = \gamma(\zeta), \zeta \in \Gamma, \quad (2)$$

где

$$\lambda(\zeta) = s(\zeta) [\beta(\zeta)t(\zeta) - \alpha(\zeta)s(\zeta)], \quad (3)$$

$s(\zeta) = s_1(\zeta) + is_2(\zeta)$, $t(\zeta) = t_1(\zeta) + it_2(\zeta)$, $i^2 = -1$, s_i, t_i ($i = 1, 2$) – вещественнозначные функции, комплекснозначные функции $\gamma(\zeta)$, $\lambda(\zeta)$ гёльдеровы на каждой из дуг $\Gamma_j = J(L_j)$, $w_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(w_x + iw_y)$, $B(z)$, $F(z)$ – функции класса $L_r(D)$, $r > 2$. При этом предполагается, что решения класса $W^{1,r}$ в точках разрыва q_i допускают «интегрируемую бесконечность», т.е. допускают оценку $|w(z)| < const \cdot |z - q_i|^{-\alpha_i}$, $0 < \alpha_j < 1$. Следуя [6], класс таких решений обозначим через H^* .

Статическая граничная задача безмоментной теории для упругой выпуклой оболочки с ребристой боковой поверхностью в математической постановке есть задача R , где $w(z)$ – комплексная функция напряжений, $F(z)$ – комплекснозначная функция внешней нагрузки. При этом условие $w \in H^*$ равносильно условию концентрации напряжений в угловых точках серединной поверхности. Отметим, что граничное условие (2) содержит векторный параметр $\vec{r}(\zeta)$, причём поле $\vec{r}$ непрерывно на каждой из дуг L_j и кусочно непрерывно на L . Не нарушая общности, полагаем, что односторонние пределы функций $\beta(\zeta)$ и $\alpha(\zeta)$ на концах дуг $\Gamma_1, \Gamma_3, \dots, \Gamma_{2n-1}$ и $\Gamma_2, \Gamma_4, \dots, \Gamma_{2n}$ соответственно равны нулю. Соответствующую задачу (2) назовём канонической (задача R_0).

Пусть граница купола K содержит n_k точек k -типа, т.е. точек, для которых $\frac{\pi}{4} < \nu < \frac{\pi}{4}k$ ($k = \overline{1, 4}$), $\Sigma n_k = 2n$. Имеет место [7]

Предложение 1. Задача R_0 безусловно разрешима с показателем квазикорректности κ тогда и только тогда, когда $2n_1 + n_2 - n_4 \geq 3$. При этом $\kappa = 2n_1 + n_2 - n_4 - 3$.

Переходя по схеме [8] с помощью семейства задач вида R_0 к оболочке K^* (обобщённый сферический купол K^*), определим её *особенные* точки границы следующим образом $\nu \simeq \frac{\pi}{4}k$ ($k = 1, 2, 3$). Тогда предложение 1 и структура формулы для κ позволяют сформулировать

Предложение 2. Если для угловых точек границы купола K^* выполнено условие $0 < \nu < \frac{3}{4}\pi$, а среди $2n$ точек p особенных ($0 \leq p \leq 2n$), то показатель квазикорректности κ есть дискретная случайная величина κ^* , принимающая значения $(\kappa - p, \kappa - p + 1, \dots, \kappa)$, где $\kappa = 2n_1 + n_2 - 3$. При этом оболочка K^* , в случае $p = 0$, квазиустойчива [8] относительно векторного параметра $\vec{r}$, задающего смешанное граничное условие.

В заключение рассмотрим *пологие* (по И.Н. Векуа [9]) оболочки с кусочно-гладкой боковой поверхностью, образующие подкласс $P \subset K^*$, где K^* — класс обобщённых сферических куполов. Так как любую точку из P можно рассматривать как канонический купол, то предложение 2 справедливо для пологих оболочек подкласса P .

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматлит, 1988. — 512 с.
2. Goldenveizer A.L. Theory of elastic thin shells. М.: Nauka, 1976. 512 p.
3. Тюриков Е.В. Краевые задачи теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с кусочно-гладким краем // Математический сборник. 1977. Т. 103 (145). № 3(7). С. 445—462.
4. Тюриков Е.В. Обобщенная граничная задача Гольденвейзера для безмоментных сферических куполов в // Тр. XIV межд. конф «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2010. С. 290—293.
5. Векуа И.Н. Общий случай смешанной граничной задачи мембранной теории выпуклых оболочек // Исследования по современному анализу и математическому моделированию. Владикавказский научный центр РАН. 2011. Т. 5. С. 225—229.
6. Muskhelishvili N.I. Singular integral equations. М.: Fizmatlit, 1968. 511 p.
7. Tyurikov E.V. A Geometric Analogue of the Vekua – Goldenveizer Problem // Doklady Mathematics. 2009. Vol. 79, No. 1. P. 83–86. DOI 10.1134/S1064562409010256
8. Тюриков Е.В. К вопросу о построении математических моделей мембранной теории выпуклых // оболочек Advanced Engineering Research. 2023. V. 23(1). S. 17-25. URL: <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-1-17-25>.
9. Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов в теории оболочек. М.: Физматлит, 1982. 288 с.

Дата поступления в оргкомитет: 23.08.2025

ГЕОМЕТРИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В.А. Шарафутдинов
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: sharafut@list.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия

Аннотация. Рассматриваются стационарные уравнения Эйлера движения идеальной несжимаемой жидкости при отсутствии объемных сил. Решение этой системы называется гавриловским потоком, если в каждой точке вектор скорости ортогонален градиенту давления. Гавриловские потоки могут быть описаны в рамках классической дифференциальной геометрии гиперповерхностей евклидова пространства. Мы также рассматриваем преобразование Надирашвили – Владуца, являющееся нелинейным аналогом преобразования Радона; любое решение уравнений Эйлера, достаточно быстро убывающее на бесконечности, лежит в ядре этого преобразования. Наконец, мы рассматриваем соотношения ортогональности для решений уравнений Эйлера, быстро убывающих на бесконечности; имеется бесконечная серия таких соотношений ортогональности.

Ключевые слова: Уравнения Эйлера движения идеальной жидкости, поток Гаврилова, преобразование Надирашвили – Владуца, соотношения ортогональности..

В размерностях 2 и 3 уравнения Эйлера

$$(u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot u = 0$$

описывают стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости. Уравнения представляют математический интерес и в произвольной размерности. Здесь

$$u = (u_1(x), \dots, u_n(x))$$

– векторное поле на $\mathbb{R}^n$ (скорость жидкости) и p – скалярная функция (давление). В настоящих лекциях мы ограничиваемся рассмотрением решений, для которых функции u_i ($i = 1, \dots, n$) и p определены на всем $\mathbb{R}^n$, достаточно гладкие и достаточно быстро убывают на бесконечности. В большинстве случаев мы будем предполагать, что u_i, p принадлежат пространству Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

В течение последних 30 лет оставался открытым вопрос: Существует ли нетривиальное (т. е. не равное тождественно нулю) решение уравнений Эйлера на $\mathbb{R}^3$, для которого $u_i, p \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$? Лишь недавно А.В. Гаврилов [3] доказал существование такого решения. Подобные решения легко строятся в любой четной размерности.

Найденное Гавриловым решение удовлетворяет дополнительному уравнению

$$u \cdot \nabla p = 0$$

(вектор скорости ортогонален градиенту давления во всех точках). Решения, удовлетворяющие этому уравнению, мы называем *гавриловскими потоками*. Дополненная последним уравнением, система Эйлера становится переопределенной. Поэтому каждый гавриловский поток является в определенном смысле исключением. Тем не менее такие решения существуют и заслуживают изучения.

Гавриловские потоки обладают следующим очевидным, но полезным свойством. Если (u, p) – гавриловский поток и функции $\tilde{u}, \tilde{p}$ определены равенствами

$$\tilde{u} = \alpha(p)u, \quad \nabla \tilde{p} = \alpha^2(p)\nabla p \quad (1)$$

с произвольной функцией $\alpha(p)$, то $(\tilde{u}, \tilde{p})$ – также гавриловский поток. На этом свойстве основана следующая конструкция, называемая *гавриловской локализацией*. Пусть гавриловский поток (u, p) определен в области $U \subset \mathbb{R}^n$ и для некоторого p_0 изобара $M_{p_0} = \{x \in U \mid p(x) = p_0\}$ является компактной регулярной гиперповерхностью. Выбрав в качестве $\alpha(p)$ гладкую функцию с носителем в малой окрестности p_0 и определив $\tilde{u}, \tilde{p}$ равенствами (1), мы получим новый гавриловский поток, носитель которого лежит в малой окрестности гиперповерхности M_{p_0} . Продолжив затем функции $\tilde{u}$ и $\tilde{p}$ нулем вне U , получим определенное на всем $\mathbb{R}^n$ решение уравнений Эйлера с компактным носителем. Именно на этом пути Гаврилов решил упомянутую выше старую проблему.

Гавриловские потоки полностью описываются в рамках классической дифференциальной геометрии гиперповерхностей в $\mathbb{R}^n$. А именно, ограничение векторного поля u на каждую регулярную *изобару* $M_{p_0} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) = p_0 = \text{const}\}$ является касательным к M_{p_0} векторным полем, отличным от нуля во всех точках и удовлетворяющим уравнениям

$$\nabla_u u = 0, \quad \text{div } u = u(\log |\nabla p|), \quad \Pi(u, u) = -|\nabla p|, \quad (2)$$

где Π – вторая квадратичная форма гиперповерхности M_{p_0} . Первое из этих уравнений означает, что u — *геодезическое векторное поле* на M_{p_0} , т. е. интегральные линии поля u (= траектории частиц жидкости) являются геодезическими гиперповерхности M_{p_0} . Теперь уравнения Эйлера можно забыть и сосредоточиться на исследовании чисто геометрической системы (2). Но это исследование оказывается нелегким занятием. Более-менее полные результаты пока удалось получить лишь для поверхностей вращения, т. е. для осесимметричных гавриловских потоков.

Следующее наблюдение принадлежит Надирашвили – Владуцу [4]. Если решение (u, p) уравнений Эйлера таково, что $u_i, p \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то для любой аффинной гиперплоскости $P \subset \mathbb{R}^n$

$$\int_P (\xi \cdot u(x))(m \cdot u(x)) dx = 0, \quad (3)$$

где m – нормальный вектор гиперплоскости P , ξ – произвольный вектор параллельный P и dx – $(n - 1)$ -мерная мера Лебега на P . Это наблюдение открывает широкие возможности применения методов интегральной геометрии (= тензорной томографии) к изучению решений уравнений Эйлера.

Для простоты рассмотрим трехмерный случай. Для гавриловских потоков двумерный интеграл в левой части уравнения (3) с помощью гавриловской локализации сводится к одномерному интегралу и мы приходим к следующему интересному утверждению. Если гавриловский поток (u, p) определен на $\mathbb{R}^3$ и P_0 – аффинная плоскость, трансверсально пересекающая регулярную изобару M_{p_0} , то для любого p , достаточно близкого к p_0 и для любой плоскости P , достаточно близкой к P_0

$$\int_{M_p \cap P} \frac{1}{|\nabla q(x)|} (\xi \cdot u(x)) (m \cdot u(x)) ds = 0,$$

где q – ограничение функции p на плоскость P и s – евклидова длина дуги кривой $M_p \cap P$.

Еще одно важное свойство решений уравнений Эйлера описывается так называемыми *соотношениями ортогональности*. Снова рассмотрим решение, для которого $u_i, p \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Соотношения ортогональности нулевого порядка утверждают, что

$$(u_i, u_j)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0 \quad (i \neq j)$$

и

$$\|u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \dots = \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = - \int_{\mathbb{R}^n} p(x) dx.$$

Эти равенства известны довольно давно [1]. Соотношения ортогональности первого порядка утверждают, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_k u_i(x) u_j(x) dx = 0 \quad (i \neq k, j \neq k), \quad \int_{\mathbb{R}^n} x_k u_i^2(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} x_k p(x) dx \quad (i \neq k).$$

Имеется бесконечная серия подобных соотношений [6].

Литература

1. Chae D., Constantin P. Remarks on a Liouville-type theorem for Beltrami flows // Int. Math. Res. Not. 2015. V. 20. P. 10012–10016.
2. Constantin P., La J., Vicol V. Remarks on a paper by Gavrilov: Grad-Shafranov equations, steady solutions of the three dimensional incompressible Euler equations with compactly supported velocities, and applications // GAFA. 2019. V. 29. P. 1773–1793.
3. Gavrilov A.V. A steady Euler flow with compact support // GAFA. 2019. V. 29. P. 190–197.
4. Nadirashvili N., Vladuts S. Integral geometry of Euler equations // Arnold Math. J. 2017. V.3, No.3. P. 397–421. arXiv:1608.08850.
5. Rovenski V.Yu., Sharafutdinov V.A. Steady flows of ideal incompressible fluid with velocity pointwise orthogonal to the pressure gradient // Arnold Math. J. 2024. V. 10. P. 223–256. arXiv:2209.14572.
6. Sharafutdinov V. A. Orthogonality relations for a stationary flow of ideal fluid // Siberian Math. J. 2018. V. 59, No. 4. P. 731–752.
7. Sharafutdinov V. A. A Radon type transform related to the Euler equations for ideal fluid // Siberian Electronic Math. Reports. V. 20, No. 2. P. 880–912.
8. Sharafutdinov V. A. Two-dimensional Gavrilov flows // Siberian Electronic Math. Reports. 2024. V. 21, No. 1. P. 247–258.

Дата поступления в оргкомитет: 27.08.2025

ИЗГИБАЕМЫЙ МНОГОГРАННИК ШТЕФФЕНА ЯВЛЯЕТСЯ ВЛОЖЕННЫМ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

В.А. Александров^{1,2}

д.ф.-м.н., доцент, e-mail: alex@math.nsc.ru, SPIN-код: 4938-9373

Е.П. Волокитин^{1,2}

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: volok@math.nsc.ru, SPIN-код: 4980-9424

¹Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Аннотация. В статье анонсируется доказательство отсутствия самопересечений у изгибаемого многогранника Штеффена, основанное на символьных компьютерных вычислениях.

Ключевые слова: Изгибаемый многогранник, многогранник Штеффена, алгоритм обнаружения пересечения треугольника и отрезка, символьные вычисления.

1. Введение

Многогранник называется *изгибаемым*, если его пространственную форму можно непрерывным образом изменять в трёхмерном евклидовом пространстве, сохраняя при этом форму и размеры каждой его грани.

В конце 1970-х годов К. Штеффен построил гомеоморфный сфере вложенный изгибаемый многогранник с треугольными гранями, имеющий всего 9 вершин. Примерно в то же время была сформулирована гипотеза о том, что многогранник Штеффена имеет наименьшее возможное число вершин среди всех вложенных изгибаемых многогранников без границы. Контрпример к этой гипотезе был построен М. Галле, Г. Грасеггером, Я. Легерским и Й. Шичо только в 2024 году. Удивительно, но до сих пор в математической литературе не было опубликовано ни одного доказательства того, что многогранник Штеффена является вложенным. Вероятно, этот факт считался очевидным для каждого, кто сделал картонную модель этого многогранника.

В статье анонсируется доказательство вложенности изгибаемого многогранника Штеффена, основанное на символьных компьютерных вычислениях.

2. Многогранник Штеффена

Самый простой способ объяснить, что такое многогранник Штеффена состоит в том, чтобы объяснить, как построить его картонную модель.

Многогранник Штеффена является изгибаемым, а значит, его пространственная форма не определяется однозначно длинами его рёбер. Наша цель — убедиться в отсутствии самопересечений у наиболее симметричной конфигурации многогранника Штеффена, которую мы обозначаем через S_0 , а именно у такого его расположения в пространстве, когда вершина v_9 находится на одинаковом расстоянии от вершин v_1 и v_2 .

В литературе описано много алгоритмов распознавания самопересечений многогранных поверхностей. Но их создатели оптимизируют быстродействие, использование памяти, и другие неинтересные для нас параметры, зато их не волнует пропущенное «небольшое», не различимое на экране, самопересечение. Нас это не устраивает в принципе, потому, что даже наличие пересечения, состоящего из одной точки, меняет ответ в нашей задаче на противоположный. Поэтому нам пришлось написать свой алгоритм и самим реализовать его в системе компьютерных вычислений *Mathematica*.

Сначала мы сводим задачу «есть ли самопересечения у данной многогранной поверхности» к задаче «пересекаются ли данные отрезок и треугольник». Для решения последней мы явным образом выписываем пять определителей (или, что то же самое, пять смешанных произведений некоторых комбинаций радиус-векторов концов отрезка и вершин треугольника). Оказывается, что зная лишь знаки этих пяти определителей можно однозначно сказать пересекаются ли данные отрезок и треугольник.

Однако, этот метод не работает, если какие-то из определителей нулеваются (т.е. если мы попали в особый случай, когда некоторые концы отрезка и некоторые вершины треугольника оказались в одной плоскости). Чтобы сделать алгоритм максимально прозрачным, мы не поручаем компьютеру разбираться с этими особыми случаями. Компьютер должен лишь сообщить нам, что вопрос о пересечении таких-то ребра и грани требует дополнительного изучения.

4. Результаты символьных вычислений

Мы реализовали свой алгоритм в системе компьютерных вычислений *Mathematica*. Координаты вершин многогранника Штеффена S_0 задали рациональными числами или в радикалах. Все вычисления проводили символьно. Время вычислений не превысило 0.1 секунды.

На выходе мы получили два сообщения: «не выявлено ни одного самопересечения» и «не выявлено ни одного случая, требующего дополнительного изучения». На этом основании мы считаем доказанной следующую теорему:

Теорема 1. *Многогранник Штеффена S_0 (т.е. многогранник Штеффена, находящийся в наиболее симметричной конфигурации) является вложенным (т.е. не имеет самопересечений).*

Статья основана на публикациях авторов [1–3], в которых заинтересованный читатель может найти дополнительную информацию.

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ для Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН (проекты FWNF–2022–0006 и FWNF–2022–0005).

Литература

1. Александров В.А., Волокитин Е. П. Вложенный многогранник, допускающий изгибание, при котором все его двугранные углы изменяются // Сиб. матем. журн. 2024. Т. 65, №. 6. С. 1076–1101.
2. Alexandrov V., Volokitin E. Given a polyhedral surface, is it self-intersection free? // Wolfram Community, Staff picks, February 6, 2025. <https://community.wolfram.com/groups/-/m/t/3382354>
3. Alexandrov V., Volokitin E. Steffen’s flexible polyhedron is embedded. A proof via symbolic computations // Preprint arXiv:2508.02392 [math.MG] 2025.

Дата поступления в оргкомитет: 12.08.2025

ИЗУЧЕНИЕ ЗВЁЗДЧАТЫХ МНОГОГРАННИКОВ Г. КОКСЕТЕРА МЕТОДАМИ А.Д. АЛЕКСАНДРОВА

А.Л. Вернер

доктор физ.-мат. наук, профессор, e-mail: werner1934@gmail.com, SPIN-код: 9759-8448

Л.А. Антипова

преподаватель, e-mail: pridoroga31@ya.ru, SPIN-код: 2955-4312

Российский государственный педагогический университет имени А.И. Герцена,
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. Однородных звездчатых многогранников с выпуклыми гранями существует 17 типов, не считая двух бесконечных серий призм и антипризм. 7 типов из них - ориентируемые многогранники, полярно-двойственные многогранники к которым определяют сферические изображения исходных многогранников. Один тип многогранника имеет нулевую кривизну в вершинах. Три типа – положительной кривизны: два из них изометричны по своей внутренней метрике выпуклым многогранникам, а для оставшегося типа существует двукратное изометрическое накрытие архимедовым многогранником.

Ключевые слова: однородный многогранник, полярно-двойственные многогранники, кривизна многогранника.

1. История вопроса

Последние 10 лет А. Л. Вернер с геометрами Герценовского Университета изучает звездчатые многогранники. С 2019 года эти исследования были продолжены с Л. А. Антиповой – старшим преподавателем РГПУ. Тематика этих исследований – однородные звездчатые многогранники. Список таких многогранников, у которых правильные грани и равные между собой их многогранные углы с точностью до движения самого многогранника, дан в обзорной статье Г. Коксетера и соавторов [1]. В таблице 7 этой статьи перечислены 75 типов многогранников отличных от призм и антипризм, среди которых и выпуклые, и звездчатые. Из них мы выделили 17 типов звездчатых многогранников с выпуклыми гранями, в книге [2] описали их построения и определили их свойства.

Эта работа была сделана к 2021 году. Уже в первый год нашей работы стало ясно удобство использования поляритета при изучении звездчатых многогранников, и необходимость дополнить каждый однородный многогранник, плоскости граней которого не содержат его центр, полярно-двойственным ему многогранником каталанова типа. Осенью 2022 года в работе [3] было определено сферическое изображение однородного многогранника с использованием поляритета, а весной 2023 года доложена и опубликована работа [4], в которой определены многогранники ка-

таланова типа, как полярно-двойственные к однородным многогранникам. Эти две работы в следующем году были продолжены большой статьёй [5] и книгой [6].

2. Основные результаты

Среди 17 типов однородных звёздчатых многогранников с выпуклыми гранями только 8 типов многогранников ориентируемые. Среди них грани одного многогранника содержат его центр. Это октатетраэдр, в обозначениях таблицы 7 статьи [1] он имеет номер 37. Он имеет нулевую кривизну и является многогранной реализацией плоского тора. Оставшиеся 7 типов многогранников задают пары полярно-двойственных многогранников. Перечислим эти пары, указывая в скобках рядом с названием однородного многогранника номер, ему соответствующий в таблице 7 статьи [1].

Первая пара: большой додекаэдр Пуансо (44) и малый додекаэдр Кеплера (43). Вторая пара: большой икосаэдр Пуансо (69) и большой додекаэдр Кеплера (68). Третья пара: большой битригональный икосододекаэдр (61) и большой триамбикикосаэдр. Обратим внимание, что первые две пары – это правильные звёздчатые многогранники Пуансо-Кеплера, которые попарно двойственны друг другу. Однородные многогранники первых трех пар имеют многогранные углы в вершинах без особенностей.

Многогранные углы остальных четырёх пар имеют особенность типа *складка*. Четвёртая пара: малый кубокубооктаэдр (38) и малый гексакронный икосотетраэдр. Пятая пара: большой ромбокубооктаэдр (59) и большой дельтовидный икосотетраэдр. Шестая пара: малый додекоикосододекаэдр (42) и малый додекоакронный гексаоктаэдр. Седьмая пара: большой икосоикосододекаэдр (62) и большой икосоакронный гексаоктаэдр. Четвёртая и пятая пары – это *внуки куба*, а шестая и седьмая – это аналогичные им *внуки додекаэдра*.

Среди однородных многогранников с выпуклыми гранями существует три типа многогранников положительной кривизны – это большой икосаэдр, многогранник второй из перечисленных пар, большой ромбокубооктаэдр, многогранник пятой пары, и неориентируемый гептаэдр (36).

А теперь Александровское «Назад, к Евклиду!» дополним «...и к Архимеду, тоже!» и опишем построение большого ромбокубооктаэдра *БРКО*, многогранника пятой пары. От вершин куба *К* отсечём 8 правильных треугольных пирамид и построим Архимедов усечённый куб *УК*. Гранями усечённого куба *УК* станут правильные восьмиугольники и треугольники. Диагонали восьмиугольных граней являются сторонами правильных октаграмм. 24 из этих сторон («косые») являются сторонами треугольников $T_1, \dots, T_8$, которые станут складками многогранных углов в вершинах строящегося нами большого ромбокубооктаэдра. Остальные 24 («прямые») диагонали октаграмм окажутся сторонами 18-ти квадратов. Вот эти 18 квадратов и 8 треугольников и являются гранями однородного многогранника *БРКО*. У него 24 вершины, 48 ребер и $18 + 8 = 26$ граней. А потому его эйлерова характеристика $\chi(\text{БРКО})$ равна $24 - 48 + 26 = 2$.

Большой ромбокубооктаэдр состоит из боковой грани звёздчатой восьмиугольной призмы, и двух шапочек, каждая из которых состоит из четырех треугольных

граней и пяти квадратных граней. Раскрутив каждую полученную фигуру, не изменяя внутренней метрики исходного многогранника, можно получить боковую поверхность правильной выпуклой восьмиугольной призмы и две выпуклые шапочки, которые вместе составляют Архимедов ромбокубооктаэдр. Таким образом, однородный многогранник *БРКО изометричен* по своей внутренней метрике Архимедову ромбокубооктаэдру.

Последний из 17 типов многогранников, имеющих положительную кривизну вершин, – гептаэдр. В статье [7] доказана теорема: для всякого невыпуклого неориентируемого однородного многогранника P с выпуклыми гранями существует ориентируемый абстрактный многогранник P^* , поверхность которого является двулистной накрывающей поверхности многогранника P . Для гептаэдра ориентируемый абстрактный многогранник, двукратно его накрывающий, может быть реализован архимедовым кубооктаэдром в евклидовом трехмерном пространстве.

Литература

1. Coxeter H.S.M., Longuet-Higgins M.S., Miller J.C.P. Uniform Polyhedra // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1954. V. 246. P. 401-450.
2. Вернер А. Л., Антипова Л. А. Строение невыпуклых однородных многогранников с выпуклыми гранями: учебное пособие. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2021. 62 с.
3. Антипова Л. А. Аналоги теоремы Гаусса-Александрова для однородных ориентируемых невыпуклых многогранников с выпуклыми гранями // Математические структуры и моделирование. 2022. № 2 (62). С. 76-107.
4. Антипова Л. А. Конфигурации полярно-двойственных многогранников. Каталановы звезды // Современные проблемы математики и математического образования: Герценовские чтения, 76: сб. науч. ст. Междунар. науч. конф. / РГПУ им. А. И. Герцена. СПб., 2023. С. 326-332.
5. Антипова Л. А. Аналог теоремы Гаусса—Александрова о площади сферического изображения для невыпуклого многогранного угла без особенностей // Материалы Междунар. конф. «Классическая и современная геометрия». Ч. 2. М.: ВИНТИ РАН, 2023. С. 10–19. (Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.; Т. 221)
6. Антипова Л. А., Вернер А. Л. Пары взаимно полярных звездчатых многогранников и их кривизны: монография. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2024. Ч. 1. 115 с.
7. Антипова Л. А. Рассуждения о неориентируемых однородных многогранниках с выпуклыми гранями // Современные проблемы математики и математического образования: Герценовские чтения, 75: сб. науч. ст. Междунар. науч. конф. СПб., 2022. С. 249-252.

Дата поступления в оргкомитет: 16.08.2025

СВОЙСТВО ПЛОСКИХ УГЛОВ ТЕТРАЭДРОВ С ЗАДАНЫМ ОСНОВАНИЕМ

Е.В. Никитенко¹

к.ф.-м.н., e-mail: evnikit@mail.ru, SPIN-код: 4026-9030

Ю.Г. Никоноров²

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: nikonorov2006@mail.ru, SPIN-код: 4078-8860

¹Рубцовский индустриальный институт АлтГТУ, Рубцовск, Россия

²Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия

Аннотация. Рассмотрим множество $\Omega(\triangle ABC)$ всех тетраэдров $ABCD$ с заданным невырожденным основанием ABC в $\mathbb{E}^3$ и вершиной D , лежащей вне плоскости ABC . Определим следующее множество $\Sigma(\triangle ABC) := \left\{ (\cos \bar{\alpha}, \cos \bar{\beta}, \cos \bar{\gamma}) \in \mathbb{R}^3 \mid ABCD \in \Omega(\triangle ABC) \right\}$, где $\bar{\alpha} = \angle BDC$, $\bar{\beta} = \angle ADC$, и $\bar{\gamma} = \angle ADB$. Доклад посвящен исследованию замыкания множества $\Sigma(\triangle ABC)$ в $\mathbb{R}^3$ и описанию его границы.

Ключевые слова: вписанный четырехугольник, евклидово пространство, определитель Кэли-Менгера, основание, тетраэдр, треугольник, угол, экстремальные задачи.

Зафиксируем невырожденный треугольник ABC в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ с расстояниями между вершинами: $d(A, B) = \bar{x}$, $d(B, C) = \bar{z}$ и $d(A, C) = \bar{y}$. Рассмотрим множество $\Omega(\triangle ABC)$ всех тетраэдров $ABCD$ с основанием ABC и вершиной D , лежащей вне плоскости ABC . Очевидно, что множество $\Omega(\triangle ABC)$ естественно параметризуется точками $D \in \mathbb{E}^3 \setminus \Pi^0$, где Π^0 - плоскость ABC . Кроме того, если Π^- и Π^+ являются двумя различными полупространствами, определенными плоскостью Π^0 , то достаточно рассмотреть точки D только в одном из этих полупространств.

Целью работы является описание следующего множества:

$$\Sigma(\triangle ABC) := \left\{ (\cos \bar{\alpha}, \cos \bar{\beta}, \cos \bar{\gamma}) \in \mathbb{R}^3 \mid ABCD \in \Omega(\triangle ABC) \right\}, \quad (1)$$

где $\bar{\alpha} = \angle BDC$, $\bar{\beta} = \angle ADC$ и $\bar{\gamma} = \angle ADB$. Основные результаты наших исследований опубликованы в [1].

Мы рассматриваем косинусы вместо углов в (1) только по техническим причинам (для упрощения вычислений). Отметим, что недавно М. Риком были получены некоторые новые ограничения на $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ и $\bar{\gamma}$ в работе [2].

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:

$$\Pi^+ = \{(p, q, r) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0\}, \quad \Pi^0 = \{(p, q, 0) \in \mathbb{R}^3\},$$

$$GT = \Pi^+ \cup (\Pi^0 \setminus \{A, B, C\}).$$

Зададим отображение $F : GT \rightarrow \mathbb{R}^3$ следующим образом:

$$F(p, q, r) = (\cos \angle BDC, \cos \angle CDA, \cos \angle ADB),$$

где $D = (p, q, r) \in GT = \Pi^+ \cup (\Pi^0 \setminus \{A, B, C\}) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{A, B, C\}$.

Легко понятно, что мы можем идентифицировать $\Sigma(\triangle ABC)$ с $F(GT)$. Следовательно, основными объектами нашего исследования будет являться замыкание CFT множества $F(GT)$ и граница BFT замыкания CFT в стандартной топологии $\mathbb{R}^3$.

Следующий результат является отправной точкой для наших исследований.

Теорема 1. Для любого заданного основания ABC , замыкание множества $\Sigma(\triangle ABC)$ содержится в множестве

$$\mathbb{P} = \{(x, y, z) \in [-1, 1]^3 \mid 1 + 2xyz - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0\}.$$

Границу данного множества будем обозначать

$$\mathbb{BP} = \{(x, y, z) \in [-1, 1]^3 \mid 1 + 2xyz - x^2 - y^2 - z^2 = 0\}.$$

Для дальнейшего изложения нам потребуется разложение

$$\Pi^0 = \mathbb{B}_- \cup S \cup \mathbb{B}_+,$$

где S - окружность, описанная вокруг треугольника ABC , $\mathbb{B}_-$ - внутренность круга, ограниченного S , и $\mathbb{B}_+$ - внешность круга. Зададим цилиндр $Cyl = S \times (-\infty, \infty)$. Понятно, что $D = (p, q, r) \in Cyl \cap \Pi^+$ тогда и только тогда, когда $(p, q) \in S$ и $r > 0$. Без ограничения общности можно считать радиус окружности S равным 1.

Теорема об обратной функции позволяет получить следующий результат.

Теорема 2. Отображение $F : GT \rightarrow \mathbb{R}^3$ является невырожденным в любой точке $(p, q, r) \in \Pi^+ \setminus Cyl$. В частности, отображение F локально биективно на множестве $\Pi^+ \setminus Cyl$ и, следовательно, $F(\Pi^+ \setminus Cyl)$ является открытым подмножеством полной меры в замыкании CFT множества $F(GT)$.

Следующий результат описывает предельные точки отображения $F(D)$.

Теорема 3. Предельные точки отображения $F(D)$, когда $D \rightarrow A$, $D \rightarrow B$ или $D \rightarrow C$, следующие:

$$\text{Lim}(A) = \{(x_0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 - 2x_0yz \leq 1 - x_0^2, x_0 = \cos \angle BAC\},$$

$$\text{Lim}(B) = \{(x, y_0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 - 2y_0xz \leq 1 - y_0^2, y_0 = \cos \angle ABC\},$$

$$\text{Lim}(C) = \{(x, y, z_0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 2z_0xy \leq 1 - z_0^2, z_0 = \cos \angle ACB\}.$$

Очевидно, что каждое из множеств $\text{Lim}(A)$, $\text{Lim}(B)$ и $\text{Lim}(C)$ - выпуклая оболочка некоторого эллипса в подходящей плоскости (так называемые «сплошные эллипсы»). Сами эллипсы будем обозначать следующим образом:

$$E_A = \{(x_0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 - 2x_0yz = 1 - x_0^2, x_0 = \cos \angle BAC\},$$

$$E_B = \{(x, y_0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 - 2y_0xz = 1 - y_0^2, y_0 = \cos \angle ABC\},$$

$$E_C = \{(x, y, z_0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 2z_0xy = 1 - z_0^2, z_0 = \cos \angle ACB\}.$$

Используя некоторые свойства погружений двумерной сферы в трёхмерное евклидово пространство, можно получить следующую теорему (см. работу [3]).

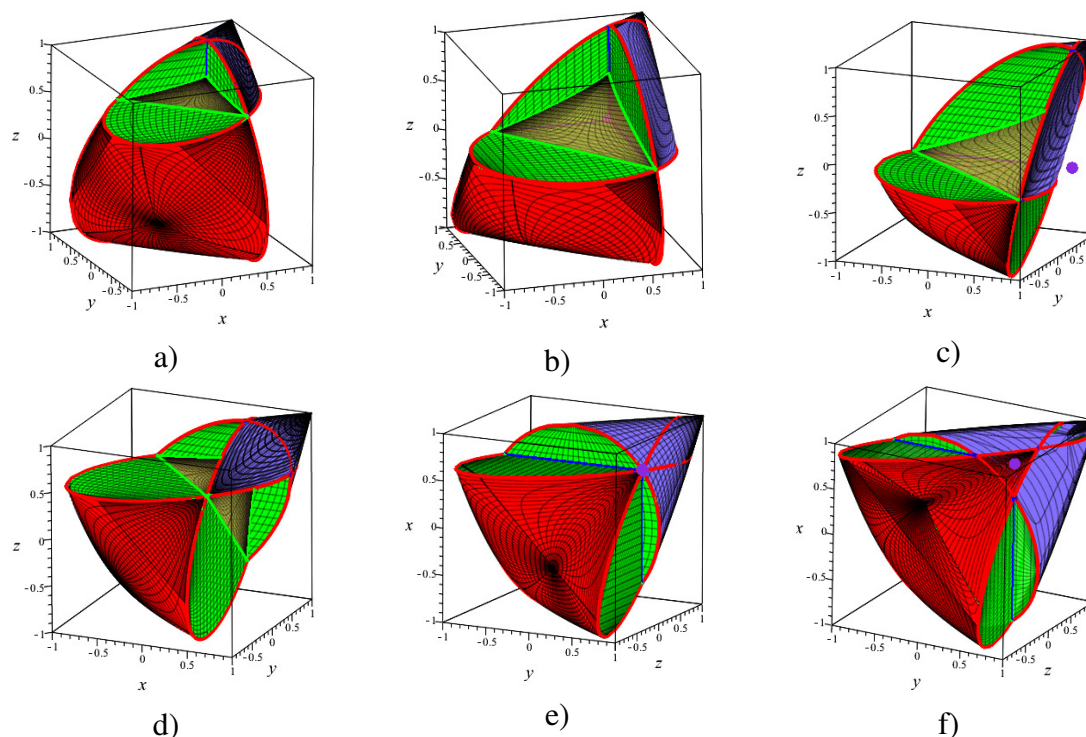


Рис. 1: Граница CFT для: а) и d) остроугольного $\triangle ABC$; б) и е) прямоугольного $\triangle ABC$; с) и f) тупоугольного $\triangle ABC$. Множество $F(\mathbb{B}_-)$ показано красным, а множество $F(\mathbb{B}_+)$ фиолетовым. Части предельных сплошных эллипсов изображены зеленым, образы специальных областей цилиндра Cyl при отображении F нарисованы коричневым. Фиолетовая точка является точкой пересечения трех плоскостей, содержащих предельные сплошные эллипсы.

Теорема 4. Для любого заданного основания ABC , замыкание CFT множества $F(GT)$ таково, что $\text{CFT} \subset \mathbb{P}$ гомеоморфно 3-мерному замкнутому шару, в то время как граница BFT множества CFT гомеоморфна 2-мерной сфере S^2 . Более того, пересечение $\text{BFT} \cap \mathbb{BP}$ есть объединение $F(\mathbb{B}_-)$, $F(\mathbb{B}_+)$, E_A , E_B , и E_C , в то время как разность $\text{BFT} \setminus \mathbb{BP}$ является объединением нескольких связных подмножеств предельных сплошных эллипсов $\text{Lim}(A)$, $\text{Lim}(B)$, и $\text{Lim}(C)$, и образов специальных областей цилиндра Cyl (см. рис. 1).

Литература

1. Nikitenko E. V., Nikonorov Yu. G. On face angles of tetrahedra with a given base // Preprint. 2025. arxiv: 2505.22374.
2. Rieck M. Q. Angular properties of a tetrahedron with an acute triangular base // Ann. Mat. Pura Appl. 2024. V. 203, N. 4. P. 1607-1642.
3. Smale S. A classification of immersions of the two-sphere // Trans. Am. Math. Soc. 1959. V. 90, P. 281-290.

Дата поступления в оргкомитет: 28.07.2025

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОРИЕНТИРОВАННОЙ ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКА В ВЫЧИСЛЕНИИ ОБОБЩЕННОГО ОБЪЕМА ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МНОГОГРАННИКА С САМОПЕРЕСЕЧЕНИЯМИ

В.А. Новицкая¹

преподаватель, e-mail: novitskayava@mail.ru, SPIN-код: 2865-0533

Л.А. Антипова²

преподаватель, e-mail: pridoroga31@ya.ru, SPIN-код: 2955-4312

¹Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
Санкт-Петербург, Россия

²Российский государственный педагогический университет имени А.И. Герцена,
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. Рассматривается класс геометрических ориентированных многогранников с самопересечениями, которые заданы своим набором граней в E^3 так, что ребра, являющиеся сторонами одной грани, образуют замкнутую ломанную, и вычисляется обобщенный объем таких многогранников с использованием ориентированных площадей граней.

Ключевые слова: геометрический многогранник, ориентированная площадь, обобщенный объем.

Пусть в евклидовом трехмерном пространстве E^3 зафиксирована декартова система координат. Рассмотрим плоскость α и произвольную точку O , не принадлежащую данной плоскости. Пусть точка H – проекция точки O на плоскость α . Тогда вектор нормали $\overrightarrow{OH}$ плоскости α и ориентация пространства определяют ориентацию плоскости α . Таким образом, для всякого треугольника $A_1A_2A_3$ и точки O , не лежащей в плоскости треугольника, определена ориентированная площадь данного треугольника относительно точки O .

Согласно определению сформулированному И.Х. Сабитовым в статье [1] при $n \geq 3$ n -угольником (многоугольником) в плоскости α будем называть конечную замкнутую ломанную $A_1A_2 \dots A_nA_1$ в данной плоскости.

Определение 1. Пусть P – n -угольник $A_1A_2 \dots A_nA_1$ в плоскости α , точка O – произвольная точка пространства E^3 , определяющая ориентацию данной плоскости, и F – произвольная точка плоскости α . Ориентированной площадью n -угольника P относительно точки O называется сумма ориентированных площадей треугольников FA_iA_{i+1} относительно точки O , где $1 \leq i \leq n$ и $A_{n+1} \equiv A_1$.

При выбранной ориентации плоскости α определение ориентированной площади n -угольника корректно, что следует, например, из утверждения 1 статьи [1].

Известно, что алгебраический объём ориентированного тетраэдра $OA_1A_2A_3$, где нумерация вершин грани $A_1A_2A_3$ определяет ее ориентацию, вычисляется по формуле: $V(T) = \frac{1}{6}(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3})$.

Теорема 1. Пусть $OA_1A_2A_3$ – ориентированный тетраэдр с вершиной в точке O и основанием $A_1A_2A_3$, ориентированным нумерацией своих вершин. Тогда алгебраический объём тетраэдра $OA_1A_2A_3$ вычисляется по формуле:

$V(OA_1A_2A_3) = \frac{1}{3}hS$, где h – расстояние от точки O до плоскости треугольника $A_1A_2A_3$, S – ориентированная площадь треугольника $A_1A_2A_3$ относительно точки O .

Пусть M – геометрический ориентированный многогранник, заданный своим набором граней в E^3 , такой что ребра, являющиеся сторонами одной грани, образуют замкнутую ломанную.

Пусть $G = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ – множество всех граней многогранника M , занумерованных в произвольном порядке. Занумеруем вершины каждой грани g_j в соответствии с ориентацией многогранника M . Получим набор ориентированных замкнутых ломанных: $A_1^j A_2^j \dots A_{k_j}^j A_1^j$, при $j \in \{1, 2, \dots, m\}$

Пусть точки $F_1, F_2, \dots, F_m$ принадлежат соответственно плоскостям граней $g_1, g_2, \dots, g_m$ ориентированного многогранника M . В плоскости каждой грани рассмотрим ориентированные треугольники: $T_{g_j} = \{F_j A_1^j A_2^j, F_j A_2^j A_3^j, \dots, F_j A_{k_j-1}^j A_{k_j}^j, F_j A_{k_j}^j A_1^j\}$. Треугольник $F_j A_{i-1}^j A_i^j$ будем обозначать T_i^j , при $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $i \in \{1, 2, \dots, k_j\}$ и $A_0 \equiv A_{k_j}$.

Заметим, что введение в плоскости каждой грани g_j многогранника дополнительной структурой в виде набора треугольников T_{g_j} позволяет рассматривать многогранник, как геометрический многогранник с треугольными гранями, для которого обобщенный объём уже определен и независимость объёма от выбора точки O в пространстве уже доказана в статье [2].

Определение 2. Обобщенным объёмом $V(M)$ ориентированного геометрического многогранника M будем называть сумму алгебраических объёмов согласованно ориентированных тетраэдров с общей вершиной в некоторой точке $O \in E^3$, не содержащейся в плоскости ни одной грани многогранника M , и с основаниями на соответственно ориентированных треугольниках T_i^j граней геометрического многогранника M :

$$V(M) = \sum_{j=1, i=1}^{j=m, i=k_j} V(OF_j A_{i-1}^j A_i^j)$$

Теорема 2. Обобщенный объём многогранника $V(M)$ вычисляется по формуле:

$$V(M) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{j=1}^m h_j S_{g_j}, \text{ где}$$

h_j – расстояние от точки O до плоскости грани g_j , S_{g_j} – ориентированная площадь многоугольника, заданного гранью g_j , относительно точки O .

Доказательство. По определению 2

$$V(M) = \sum_{j=1, i=1}^{j=m, i=k_j} V(OF_j A_{i-1}^j A_i^j).$$

По теореме 1 объем каждого из полученных тетраэдров вычисляется по формуле:

$$V(OF_j A_{i-1}^j A_i^j) = \frac{1}{3} h_j S_i^j,$$

где h_j – расстояние от точки O до плоскости грани g_j , в которой содержится треугольник $F_j A_{i-1}^j A_i^j$, S_i^j – ориентированная площадь треугольника $F_j A_{i-1}^j A_i^j$ относительно точки O . Воспользовавшись этим фактом, получаем:

$$V(M) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{j=1}^m h_j \sum_{i=1}^{k_j} S_i^j.$$

Заметим, что $\sum_{i=1}^{k_j} S_i^j$, где S_i^j – ориентированная площадь треугольника $F_j A_{i-1}^j A_i^j$ относительно точки O , ничто иное, как ориентированная площадь многоугольника $A_1^j A_2^j \dots A_{k_j}^j A_1^j$, определенного гранью g_j , обозначим её через S_{g_j} .

Тогда получаем:

$$V(M) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{j=1}^m h_j S_{g_j},$$

где h_j – расстояние от точки O до плоскости грани g_j , S_{g_j} – ориентированная площадь многоугольника, заданного гранью g_j , относительно точки O . ■

Литература

1. Сабитов И. Х. Решение циклических многоугольников // Математическое просвещение. 2010. № 14. С. 83–106.
2. Сабитов И. Х. Алгебраические методы решения многогранников // Успехи математических наук. 2011. Т. 66, № 3(399). С. 3–66.

Дата поступления в оргкомитет: 19.08.2025

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

И.Ф. Майник

к.ф.-м.н., e-mail: j.mainik@gmx.de

Гамбург, Германия

Аннотация. В 1796 году Гаусс решил задачу о построении с помощью циркуля и линейки правильного 17-угольника. Затем он доказал, что можно построить правильный многоугольник с $n = 2^m n_1 \cdots n_l$ вершинами, где $n_1, \dots, n_l$ различные простые числа вида $n_k = 2^{2^{\nu_k}} + 1$. В результате Гаусса существенно построение многоугольников с $n_k = 2^{2^{\nu_k}} + 1$ вершинами при простом n_k . В настоящее время известны лишь следующие такие числа: 3, 5, 17, 257 и 65537. Практическая реализация метода Гаусса нетривиальна, и только в 1837 году Гермес объявил, что нашёл реализацию построения 65537-угольника. Но написанный им текст не был полностью опубликован и строго проверен. Автор предлагает новое решение задачи построения правильных n -угольников и детально описывает реализацию построения при n , равном 3, 5, 17, 257 и 65537.

Ключевые слова: Многоугольник, правильный n -угольник, циркуль, линейка.

В 1796 г. К.Ф. Гауссу удалось решить задачу построения циркулем и линейкой правильного 17-угольника. Развив найденную при этом идею, он затем доказал, что можно построить правильный многоугольник с $n = 2^m n_1 \cdots n_l$ вершинами, где $n_1, \dots, n_l$ различные простые числа вида $n_k = 2^{2^{\nu_k}} + 1$, [1]. В 1837 г. П. Вантцель доказал, что только эти многоугольники могут быть построены. Простые числа вида $n_k = 2^{2^{\nu_k}} + 1$ называют числами Ферма, и в результате Гаусса существенно, что для таких n_k построение возможно. В настоящее время известны лишь следующие числа Ферма: 3, 5, 17, 257 и 65537.

Построение правильного n -угольника с вершинами на окружности радиуса 1, очевидно, состоит в построении решений уравнения $z^n = 1$, а это известное $z = 1$ и ещё решения уравнения

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0. \quad (1)$$

При работе в области алгебры Гаусс пришёл к идее, что решения этого уравнения $z^k = e^{\frac{k \cdot 2\pi i}{n}}$, $1 \leq k \leq n-1$, можно упорядочить так, что если затем разделять их на две части, выбирая элементы через один, то получаются части, суммы элементов которых можно построить циркулем и линейкой. Повторяя это разделение, можно прийти к отдельным элементам z^k и построить n -угольник.

Практическая реализация метода Гаусса нетривиальна при больших n . Только в 1837 г. Й. Гермес объявил, что нашёл её для 65537-угольника. Но написанный им текст был слишком велик, и Гермес смог опубликовать лишь краткий его обзор.

Сам текст хранится в чемодане в библиотеке Гёттингенского университета и, скорее всего, никогда не был проверен достаточно строго.

В работе [2] представлен новый подход к решению задачи построения правильных n -угольников и детально описана реализация построения для всех известных чисел Ферма. Детально рассмотрено, в частности, и построение 65537-угольника.

1. Инвариантные наборы и их произведение

Пусть для некоторого набора элементов z^k известна сумма его элементов. Если мы разделим его на 2 части, то сумма этих частей уже известна. Если удастся вычислить произведение для сумм элементов этих частей, то суммы элементов для обеих новых частей можно определить из квадратного уравнения и построить. Это значит, что необходимо искать разделения, для которых произведение удастся вычислить.

Для $S = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z$, например, нам известно $S = -1$, [1]. При разделении S на части F_1 и F_2 мы т.о. имеем $F_1 + F_2 = -1$, и F_1 и F_2 надо выбрать так, чтобы удалось определить $F_1 \cdot F_2$. Идея состоит в том, чтобы выбрать F_1 и F_2 так, что в произведении $F_1 \cdot F_2$ каждый элемент из S встречается одинаковое число раз, т.е. чтобы $F_1 \cdot F_2$ покрывало S равномерно. Тогда $F_1 \cdot F_2$ легко вычислить, а F_1 и F_2 построить. Аналогично, если уже известны несколько частей, т.е. известны суммы их элементов, то при разделении одной из них новые части надо выбрать так, чтобы соответствующее произведение дало равномерное покрытие для известных частей.

Если F_1 и F_2 две части для S , то справедливо следующее равенство

$$(F_1 + F_1^2) + F_1 \cdot F_2 = \mu(F_1) \cdot S + \mu(F_1), \quad (2)$$

где $\mu(F_1)$ – число элементов в F_1 . Из этого равенства легко увидеть, что $F_1 \cdot F_2$ и $F_1 + F_1^2$ одновременно дают равномерное покрытие S . Легко доказать следующее:

Лемма 1. Пусть F_1 такое, что $F_1 + F_1^2$ даёт равномерное покрытие S . Тогда из $z^k \in F_1$ следует, что $z^{2k} \in F_1$.

Из Леммы 1 следует, что вместе с элементом z^k из F_1 все элементы $z^{2k}, z^{4k}, z^{8k}, \dots$ принадлежат F_1 . Так мы приходим к понятию инвариантного набора.

Набор, состоящий из всех различных элементов $z^k, z^{2k}, z^{4k}, \dots$, мы называем инвариантным набором. Элемент z^k мы называем стартовым элементом этого инвариантного набора. Порядок элементов, при котором квадрат элемента следует за элементом, мы называем естественным порядком. Лемма 1 означает, что инвариантный набор нельзя разрывать пока есть другие инвариантные наборы.

Предложение 1. При простом $n = 2^{\nu} + 1$ каждый инвариантный набор состоит из $2^{\nu+1}$ различных элементов. При естественном порядке m -ый элемент, $1 \leq m \leq 2^{\nu}$, инвариантного набора обратен $(2^{\nu} + m)$ -му элементу набора. Для инвариантного набора выполнено следующее круговое свойство: квадрат последнего элемента даёт первый элемент набора.

Далее инвариантные наборы обозначаются G_k , а их число обозначается ng . При $n = 2^{\nu} + 1$ мы имеем $ng = 2^{2^{\nu} - (\nu+1)}$. Легко понять, что инвариантные наборы не пересекаются и покрывают всё S , $S = G_1 + G_2 + \dots + G_{ng}$.

Предложение 2. Все инвариантные наборы получаются и естественным образом упорядочиваются следующим образом. Для G_1 стартовым элементом служит z^1 , и если z^{s_k} – стартовый элемент для G_k , то для G_{k+1} стартовым является $z^{s_{k+1}}$ с $s_{r+1} = 3 \cdot s_k \bmod n$. Для инвариантных наборов выполнено круговое свойство: при продолжении вычисления таким способом мы приходим от G_{ng} к набору G_1 .

Инвариантные наборы состоят из пар $p_k = z^k + z^{n-k} = 2\cos\frac{2k\pi}{n}$ и выгоднее работать с ними. Они имеют действительное значение, их в два раза меньше чем элементов и их также просто перемножать. При разбиении S на части необходимо вычислять произведения инвариантных наборов. Вычисление этих произведений детально рассмотрено в [2]. Показано, что при $n = 2^{2^\nu} + 1$ произведение двух различных инвариантных наборов является суммой $2^{\nu+1}$ инвариантных наборов, и показано, как его эффективно вычислять.

2. Метод разделения и построение многоугольников

Набор $S = G_1 + G_2 + \dots + G_{ng}$ разделяется на части $F(j, 2^k)$, $1 \leq j \leq 2^k$, $2 \leq 2^k \leq np$, состоящие из сумм инвариантных наборов. В обозначении $F(j, 2^k)$ j – номер первого набора, а 2^k – шаг, с которым номера наборов в $F(j, 2^k)$ растут. Здесь $F(j, np) = G_j$, а S можно понимать как $F(1, 1)$.

Сами инвариантные наборы разделяются аналогично. Набор G_k разделяется на части $G_k(j, 2^m)$, $1 \leq j \leq 2^m$, до тех пор пока приходим к отдельным парам из G_k .

Следующие два утверждения вместе дают, в частности, доказательство того, что для чисел Ферма правильный n -угольник можно построить.

Теорема 1. Произведение $F(j, 2^{m+1}) \cdot F(j + 2^m, 2^{m+1})$ можно вычислить из известных значений $F(k, 2^m)$, $1 \leq k \leq 2^m$, с помощью линейной комбинации с целыми коэффициентами и поэтому построить циркулем и линейкой.

Теорема 2. Произведение $G_k(s, 2^{m+1}) \cdot G_k(s + 2^m, 2^{m+1})$ можно вычислить из известных значений $G_j(l, 2^m)$, $1 \leq j \leq ng$, $1 \leq l \leq 2^m$, с помощью линейных комбинаций и произведений и поэтому построить циркулем и линейкой.

При доказательстве этих теорем находятся достаточно простые способы определения соответствующих представлений для $F(j, 2^{m+1}) \cdot F(j + 2^m, 2^{m+1})$ и $G_k(s, 2^{m+1}) \cdot G_k(s + 2^m, 2^{m+1})$, которые позволяют эффективно реализовать шаги построения многоугольника. Сами шаги при этом ведутся так, чтобы прийти к значению p_1 , по которому тривиально строится весь многоугольник.

Чтобы прийти к p_1 , не нужны все возможные части разделений на каждом шаге, и можно ограничиваться построением только тех частей, которые действительно используются далее. Это существенно редуцирует объем работы при реализации.

Литература

1. Гаусс К.Ф. Труды по теории чисел. М.: АН СССР, 1959.
2. Mainik J. Regular polygons. URL: <https://arxiv.org/abs/2505.14865> (2025).

Дата поступления в оргкомитет: 14.08.2025

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ВЫПУКЛЫМИ ОБОЛОЧКАМИ МНОЖЕСТВА, ЕГО ГРАНИЦЫ И ЕГО ЗАМЫКАНИЯ

И.В. Поликанова¹

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: Anirix1@yandex.ru, SPIN-код: 6797-1379

М.В. Куркина²

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: mavi@inbox.ru, SPIN-код: 1922-4109

¹Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул, Россия

²Ханты-Мансийская государственная медицинская академия, Ханты-Мансийск, Россия

Аннотация. Авторами изучаются соотношения между выпуклыми оболочками границы множества и замыкания этого множества в аффинном n -мерном пространстве A^n . Известно, что выпуклая оболочка границы множества содержится в выпуклой оболочке его замыкания. Нами выявлены 4 равносильных условия их совпадения. Также даётся описание замыканий выпуклых оболочек замыкания множества и границы этого множества в случае, когда совпадения нет.

Ключевые слова: граница множества, выпуклая оболочка, выпуклая оболочка границы множества, выпуклая оболочка замыкания множества.

Обозначения: CoX , ∂X , clX соответственно выпуклая оболочка, граница и замыкание множества X .

Тот факт, что $Co(\partial X) \subset Co(clX)$ вытекает непосредственно из свойства монотонности замыкания и выпуклых оболочек.

Основные результаты:

Теорема 1. Для множества X в n -мерном аффинном пространстве A^n следующие утверждения равносильны:

1. $Co(clX) = Co(\partial X)$.
2. $cl(Co(clX)) = cl(Co(\partial X))$.
3. Множество X не содержит полупространств.
4. Выпуклая оболочка дополнения множества X есть пространство A^n .

Для ограниченного множества все эти утверждения справедливы.

Теорема 2. Для ограниченного множества X в n -мерном аффинном пространстве A^n имеют место равенства:

$$cl(CoX) = Co(clX) = Co(\partial X).$$

Приведем пример, показывающий, что для неограниченного множества эти равенства могут не выполняться.

Пример 1. Пусть X – множество в евклидовой плоскости, ограниченное одной ветвью тангенсоиды. Тогда $Co(clX)$ есть открытая полуплоскость, $cl(CoX)$ является замкнутой полуплоскостью, а $Co(\partial X)$ представляет собой слой между двумя асимптотами этой ветви тангенсоиды.

Теорема 3. Если выпуклая оболочка границы множества $X \subset A^n$ не совпадает с выпуклой оболочкой замыкания множества X , то имеет место один из двух случаев:

- 1) $Co(clX) = A^n$,
- 2) $Cl(Co(clX))$ есть замкнутое полупространство, при этом $Cl(Co(\partial X))$ есть либо ограничивающая это полупространство гиперплоскость, либо слой между двумя параллельными гиперплоскостями (включающий эти гиперплоскости), одна из которых ограничивает это полупространство.

Методы доказательства – топологические, с опорой на факты теории выпуклых тел в A^n . Доказательство теорем 1, 2 имеется в [1].

Литература

1. Поликанова И.В., Куркина М.В. Критерии совпадения выпуклых оболочек границы множества и его замыкания // Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 1 (141). С. 118-122.

Дата поступления в оргкомитет: 07.09.2025

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ПЕРЕЧИСЛЕНИИ RR -МНОГОГРАННИКОВ

В.И. Субботин

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: geometry@mail.ru, SPIN-код: 2953-1580

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)

Новочеркасск, Россия

Аннотация. В работе представлены некоторые результаты автора по вопросам существования и перечисления замкнутых выпуклых многогранников в E^3 с правильными гранями и ромбическими вершинами (RR -многогранников). Акцент сделан на теоремах существования и полноте перечисления составных и несоставных RR -многогранников с условными рёбрами.

Ключевые слова: RR -многогранник, составной RR -многогранник, условные рёбра.

1. Составные RR -многогранники с условными рёбрами

Определение 1. Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется RR -многогранником, если множество его граней является объединением двух непересекающихся непустых множеств: множества равных ромбических граней, образующих симметричные гранные звёзды без общих рёбер, и множества правильных граней. Если указанные правильные грани – одинакового вида, то многогранник называется RR -многогранником *первого типа*; если правильные грани различного вида, то многогранник называется RR -многогранником *второго типа*.

Таким образом, RR -многогранники связаны с многогранниками Джонсона-Залгаллера, у которых все грани правильные многоугольники, см. [2, 3], а также с правильногранными многогранниками, грани которых могут иметь условные рёбра, см. [3]. После перечисления всех составных RR -многогранников второго типа и всех RR -многогранников первого типа, см. [4–6], представляет интерес существование и полнота списка RR -многогранников с условными рёбрами.

Определение 2. Составным RR -многогранником с условными рёбрами назовём такой RR -многогранник с условными рёбрами, который можно разбить плоскостями, проходящими через рёбра или условные рёбра, на следующие части: 1) ромбические пирамиды, возможно, с условными рёбрами 2) многогранники с правильными гранями и, возможно, с условными рёбрами.

Теорема 1. Существуют только тридцать три составных RR -многогранника с условными рёбрами.

Замечание 1. Для доказательства теоремы 1 проводится анализ доказательств существования всех 46-ти составных RR -многогранников без условных рёбер (см. [4]) и проверяется возможность возникновения в каждом случае условных рёбер.

Используя обозначения из [3], RR -многогранники теоремы 1 можно записать соответственно в виде:

1) $P_4 + R_4$ ([4]), 2) $P_4 + R_4 + M_2$ ([4]), 3) $P_4 + 2R_4$ ([8]), 4) $P_3 + P_4 + R_4$ ([6]), 5) $R_4 + P_3$ ([2]), 6) $R_4 + R_4$ ([4]), 7) $M_{10} + R_6$ ([3]), 8) $M_{10} + R_6 + M_1$ ([6]), 9) $M_{11} + R_8$ ([4]), 10) $M_{11} + 2R_8$ ([8]), 11) $M_{11} + R_8 + M_5$ ([4]), 12) $M_{11} + R_8 + M_5'$ ([8]), 13) $A_5 + R_5$ ([5]), 14) $A_5 + 2R_5$ ([10]), 15) $A_5 + R_5 + M_3$ ([5]), 16) $M_7 + R_5 + M_3$ ([4]), 17) $M_7 + R_5$ ([3]).

Число в квадратных скобках означает число условных рёбер многогранника, RN — N -ромбическая пирамида.

Следующие шестнадцать RR -многогранников с условными рёбрами продолжают предыдущую серию из 17-ти RR -многогранников.

Ромбические усечённые додекаэдры:

18) $M_{12} + R_{10}$ ([5]), 19) $M_{12} + R_{10} + R_{10}$ ([10]), 20) $M_{12} + 2R_{10}$ ([10]), 21) $M_{12} + 3R_{10}$ ([15])

Ромбические наращенные усечённые додекаэдры:

22) $M_6 + M_{12} + R_{10}$ ([5]), 23) $M_6' + M_{12} + R_{10}$ ([10]), 24) $M_6' + M_{12} + 2R_{10}$ ([15]), 25) $M_6 + M_{12} + 2R_{10}$ ([10]), 26) $2M_6' + M_{12} + R_{10}$ ([15]), 27) $M_6 + M_6' + M_{12} + R_{10}$ ([10]), 28) $2M_6 + M_{12} + R_{10}$ ([5])

Ромбические наращенные пятискатные ротонды:

29) $M_3 + M_9 + M_3 + R_{10}$ [8], 30) $M_3 + M_9 + R_{10}$ [5], 31) $M_3 + M_9 + P_{10} + R_{10}$ [5], 32) $M_3 + M_9 + A_{10} + R_{10}$ [5], 33) $M_3' + M_9 + R_{10}$ [4].

2. Несоставные RR -многогранники первого типа с условными рёбрами

Теорема 2. *Существуют только пять несоставных RR -многогранников первого типа с условными рёбрами.*

Замечание 2. На рис. 1 эти пять многогранников отмечены так: а) – составлен из 6-ти ромбов с углом 60° и двух равных тупоугольных ромбических звёзд, с) – составлен из 10-ти ромбов с углом 60° и двух 5-ромбических звёзд f) и g) – наращённые октаэдр и кубookтаэдр, h) – составлен из уменьшенного RR -многогранника первого типа с одной тупоугольной ромбической вершиной и 5-ромбической пирамиды. б) – развёртка многогранника а), d) – вид «сверху» многогранника с), e) – развёртка многогранника с) без ромбических звёзд. Ромбические вершины, т.е. вершины ромбических звёзд, обозначены V и W .

Для доказательства теоремы 2 анализируются доказательства существования всех двадцати четырёх RR -многогранников первого типа без условных рёбер (см. [5, 6]) и проверяется возможность возникновения в каждом случае условных рёбер.

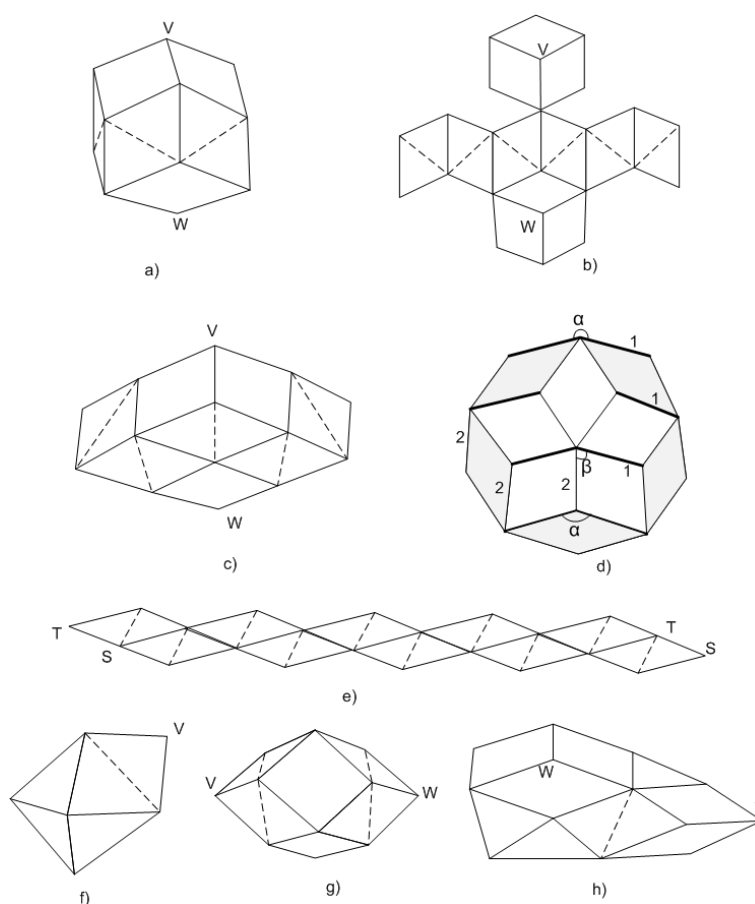


Рис. 1: Несоставные RR -многогранники первого типа с условными рёбрами

Литература

1. Залгаллер В.А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1966. Т. 2. С. 1–220.
2. Johnson N. W. Convex polyhedra with regular faces // Can. J. Math. 1966. V. 18, N. 1. P. 169–200.
3. Tupelo-Schneck R. Convex regular-faced polyhedra with conditional edges. URL: <http://tupelo-schneck.org/polyhedra> (дата обращения: 29.07.2025).
4. Subbotin V.I. On the composite RR -polyhedra of the second type // Siberian Mathematical Journal. 2023. V. 64, No. 2. P. 500–506.
5. Субботин В.И. О перечислении выпуклых RR -многогранников // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, №. 5. С. 194–207.
6. Субботин В.И. О существовании и полноте перечисления трехмерных RR -многогранников // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2022. Т. 216. С. 106–115.

Дата поступления в оргкомитет: 31.08.2025

ОТ ПРАВИЛЬНОГРАННЫХ ТЕЛ К ПАРКЕТОГРАННИКАМ: МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПОЛНОТЫ ИХ СПИСКА И ПРИЛОЖЕНИЙ

А.В. Тимофеев

д.ф.-м.н., доцент, e-mail: A.V.Timofeenko62@mail.ru, SPIN-код: 9529-3406

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

Аннотация. На пути от классификации выпуклых правильных тел к описанию всех типов паркетограмм встречаются близкие этим выпуклым телам многограммы. На базе ранее известных мер удалённости последних от правильных тел строятся сколь угодно близкие к паркетограммам тела, комбинаторное строение которых не позволяет им быть правильными.

Ключевые слова: Выпуклое правильное тело, паркетограмм, паркетограмм, группа симметрий.

Напомним, паркетограмм называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного числа и более одного равноугольных многоугольников. Известно описание всех 23 типов паркетограмм. Паркетограммом называется выпуклый многогранник, обладающий паркетограммными и, быть может, равноугольными гранями. Более полувека назад было замечено, что кроме четырёх бесконечных серий существует лишь конечное число типов паркетограмм. Однако неизвестен ответ на вопрос: «Каковы все типы паркетограмм?» Хотя каждый шаг к ответу на этот вопрос занимает не одно десятилетие, уже сегодня можно находить как новые серии паркетограмм, так и близкие рассматриваемым многогранникам тела. Последним посвящён доклад автора семинару по дискретной геометрии и геометрии чисел ¹ 19 февраля 2025 г. К объявлению об этом заседании прикреплён текст доклада с подробными доказательствами результатов типа теоремы 2 настоящей работы, упражнениями и ссылками на символичные вычисления.

1. О нахождении всех выпуклых тел с правильными гранями и паркетограмм без фиктивных вершин

История теоремы о полном списке выпуклых правильных тел, описана неоднократно, см., например, [1]. Поэтому кратко напомним, что началом её можно считать 1946 г. Тогда на кафедру геометрии ленинградского университета было доставлено письмо Л. Н. Есауловой. В нём доказано, что кроме бесконечных серий

¹ <http://new.math.msu.su/departament/dm/index.php?id=nauchno-issledovatel'skij-seminar-po-diskretnoj-geometrii-i-geometrii-chisel>

призм и антипризм существует лишь конечное число выпуклых многогранников с правильными гранями, которые будем называть правильными многогранниками. Через два десятилетия уже шло соревнование отечественной (ленинградской) и западных геометрических школ за приоритет в нахождении классификации правильных многогранников. Оно закончилось опубликованием, [2], списка выпуклых правильных многогранников и доказательством его полноты, [3]. Точнее, была доказана

Теорема 1. *Кроме призм Π_n и антипризм A_n , $n = 3, 4, \dots$, существует ровно 108 выпуклых многогранников с правильными гранями:*

правильные тетраэдр, икосаэдр и додекаэдр;

13 архимедовых тел,

92 многогранника Джонсона

(Л. Н. Есаулова, В. А. ЗАЛГАЛЛЕР, N. Johnson, 1946–1967).

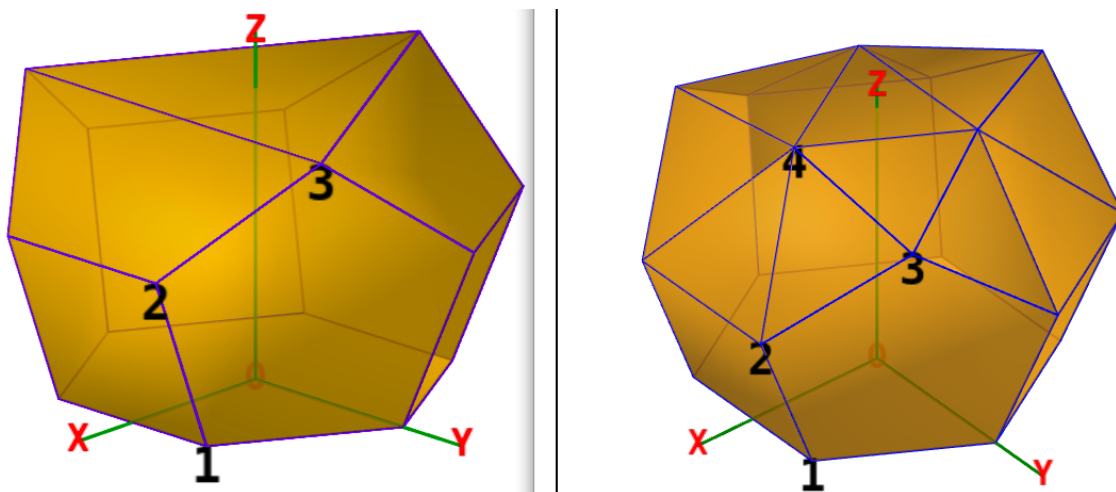


Рис. 1: 11-гранник Q_{6b} и 20-гранник Q_{6be}

Если кроме правильных граней допускать ещё так составленные из правильных многоугольников грани, что каждая вершина грани служит и вершиной такого многоугольника, то к телам теоремы 1 добавляется ещё 78 многогранников, [4], включая многогранник Прякина Q_6 . В основном здесь – кроме сказанного выше – и проходит сегодня граница известного и неизвестного о паркетогранниках.

2. Паркетогранник Q_{6b} и 20-гранник Q_{6be}

Теорема 2. *Объединение орбит точек*

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \right), \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \left(1 + \sqrt{5} \right) \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3} \right) \right)$$

при действии группой (диэдра)

$$[3] \cong \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

совпадает с множеством вершин 11-гранника Q_{6b} с правильными одной шестиугольной, тремя пятиугольными, тремя квадратными и треугольной гранями, а также тремя трапециями, каждая из которых составлена из трёх треугольников с единичными рёбрами. Треугольная грань разделена своими средними линиями на четыре таких треугольника.

Доказательство. Построив объединение орбит из формулировки теоремы 2, строим все такие отрезки, соединяющие точки этого объединения, что длины их равны единице и диагоналям нетреугольных граней: $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\sqrt{3}$, 2. Если получим на чертеже вместе с рёбрами все диагонали нетреугольных граней, а также треугольники, из которых составлены трапеции, и треугольники со сторонами длины два, то теорема доказана. ■

Пусть $\epsilon > 0$. Добавим к трём (фундаментальным) вершинам теоремы 2 четвертую точку, расположенную на высоте ϵ над серединой большего основания трапецевидной грани с ребром V_2V_3 :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3} \right) + \epsilon \right).$$

Действуя группой $[3]$ теперь уже на четыре точки, получим все вершины 20-гранника², у которого все нетреугольные и одна треугольная грань правильные, а оставшиеся 12 треугольных граней сколь угодно мало – в зависимости от ϵ – отличаются от правильных. Будем этот 20-гранник обозначать $Q_{6b\epsilon}$.

Литература

1. Гурин А.М., Залгаллер В.А. К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями и гранями составленными из правильных // Труды Математического Общества Санкт-Петербурга. 2008. Т. 14. С. 215–294.
2. Johnson N.W. Convex Polyhedra with Regular Faces // Canadian Journal of Mathematics. 1966. V. 18. P. 169–200.
3. Залгаллер В.А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1967. Т. 2. С. 5–221.
4. Тимофеев А.В. К перечню выпуклых правильных тел // Современные проблемы математики и механики. Том. VI. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н.В. Ефимова/ Под ред. И.Х. Сабитова и В.Н. Чубарикова. М.: издательство Моск. ун-та, 2011. С. 155–170.

Дата поступления в оргкомитет: 06.09.2025

²<https://u.to/Tk7nIQ>

FINITE GEOMETRIES AND CORRESPONDING QUASIGROUPS

M. Rasskazova

Ph.D., e-mail: marinarasskazova@yandex.ru

Universidade Federal ABC, Sao Paulo, Brasil

Аннотация. In this paper we introduce the notion of generalized Steiner quasigroup (GS -quasigroup) P such that P is a geometry with four points on a line (4-geometry). By definition the unique line that passed by two different points $a, b \in P$ is $\{a, b, ab, ba\}$. We construct free GS -quasigroups and prove that every its subquasigroup is free too. Moreover, we describe the structure of group of multiplication of free GS -quasigroup and prove that its group of automorphisms is tame (generated by elementary automorphisms). In the last Chapter we construct the central (in some sense) extension of two group-like GS -quasigroups. By definition, a GS -quasigroup is group-like if the corresponding 4-geometry is affine geometry over the field with four elements.

Ключевые слова: Steiner quasigroups, subquasigroup, affine geometry, group of automorphisms.

1. Introduction

In this paper we expand the definition of Steiner quasigroups (see ([8], ([10]))) and loops and its connection with Steiner Triple Systems (STS) on Generalized Steiner quasigroups and connection with 4-geometries (geometries where every line has exactly four points). In the case of geometries with three points on the line the corresponding results was obtained in ([3], [12], [4]). The general idea of connection between n -geometry (where every line contains n points) and some idempotent quasigroup (where $x.x = x$ for every x) was formulated in [15]. Suppose that we have some variety $\mathbf{V}$ of idempotent quasigroups such that every two different elements from any quasigroup $Q \in \mathbf{V}$ generate a free quasigroup in $\mathbf{V}$ and this free quasigroup has n elements. In [14] was proved that it is possible if and only if $n = p^m$, where m is natural number and p is prime number. Every quasigroup Q from such variety we can consider as n -geometry where line, that passed by two different elements $a, b \in Q$, is the subquasigroup generated by a, b . We can call such variety n -variety. Note that it is possible (if $n > 4$) that there exist two different n -varieties (for example, one commutative and the other not commutative). We apply the ideas from this paper in the case $n = 4$, where we have not most technical difficulties. Part of those results was proved in ([16]).

Let suppose that $\mathbf{V}_4$ is an 4-variety and $P \in \mathbf{V}_4$. Let consider $a \neq b \in P$. If $ab = ba$, then the variety $\mathbf{V}_4$ is commutative and subquasigroup L generated by a, b has elements a, b, ab, x , where $x = ab.b$ or $x = ab.a$. Indeed, if $ab.b = a$, then $ab.a = b$ and L has exactly three elements, contradiction. Hence $L = \{a, b, ab, ba\}$. Then the sets $\{a, b, ab, ba\}$

and $\{a, ab, a.ab, ab.a\}$ are equal. Hence $ab.a = b$ or $ab.a = ba = b.a$, but the last equality is impossible, since $ab \neq b$. Then

$$ab.a = b, \quad a.ab = ba, \quad (1)$$

Определение 1. A quasigroup P is called generalized Steiner quasigroup (GS -quasigroup) if P is idempotent quasigroup with the identities (1).

Предложение 1. The variety $\mathbf{GS}$ of all GS -quasigroups is the unique 4-variety. Moreover, the free two generated quasigroup F_2 in $\mathbf{GS}$ has the following table of multiplications.

$\cdot$	x	y	xy	yx
x	x	xy	yx	y
y	yx	y	x	xy
xy	y	yx	xy	x
yx	xy	x	y	yx

2. Free GS -quasigroups

Определение 2. Let $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ be a set of letters and $W(X)$ is a set of all non-associative X -words. By definition a word $u \in W(X)$ is *critical* if

$$u \in Cr(X) = \{vv, v(vw), (vw)w, (vw)v, v(wv), (vw)(wv) \mid v, w \in W(X)\}.$$

A word $u \in W(X)$ is called *regular* if u does not contains any critical subword and *non-regular* in the other case.

Предложение 2. . Let F be a free GS -loop, with free generators $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Then F is a set of all reduced words. Moreover, if $v, w \in F$, and $vw \in F$, then $v.w = vw$. If $vw \notin F$, then we have one of the following cases:

- (0) $v = w$ and $v.v = v$;
- (1) $v = v_1v_2$, $w = v_1$ and $w.v = v_2.v_1 = v_2v_1$;
- (2) $v = v_1v_2$, $w = v_1$ and $v.w = v_2$;
- (3) $v = v_1v_2$, $w = v_2$ and $w.v = v_1$;
- (4) $v = v_1v_2$, $w = v_2$ and $v.w = v_2.v_1 = v_2v_1$;
- (5) $v = v_1v_2$, $w = v_2v_1$ and $v.w = v_1$.

Here $v.w$ is the product of v and w in F , and vw is a non-associative word with subwords v and w .

Now we will study subquasigroups and automorphisms of free GS -quasigroup $F = F(X)$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Let denote by $Q(F(X))$ the set of all finitely generated subquasigroups of $F(X)$ and by $S(F(X))$ the set of all finite subsets (may be with repetitions). Is is clear that there exists canonical map $\pi : S(F(X)) \rightarrow Q(F(X))$, such that $\pi(T) = \langle T \rangle$, $T \in S(F(X))$. We will construct the subset $S_r(F(X)) \subset S(F(X))$, such that $Q(F(X)) = \pi(S_r(F(X)))$ and $\pi(T_1) \neq \pi(T_2)$ if $T_1 \neq T_2$.

We will use the following properties of a subset $T \subset F(X)$.

Определение 3. A finite subset $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ of free GS -quasigroup $F = F(X)$ is **reduced** if for every $1 \leq i \leq m$ and $R \in G_i$ we have that $|t_i R| \geq |t_i|$. Here G_i is a subgroup of $Mult(F)$, generated by the set $\{R_t \mid t \in T \setminus t_i\}$.

Предложение 3. Let $S_r(F(X)) = \{T \in S(F(X)) \mid T \text{ is reduced}\}$, then $Q(F(X)) = \pi(S_r(F(X)))$ and $\pi(T_1) \neq \pi(T_2)$ if $T_1 \neq T_2$, where $\pi : S(F(X)) \rightarrow Q(F(X))$ is the map defined above.

Лемма 1. Let $T = \{t_1, \dots, t_m\} \subset F(X)$, be a reduced subset and $\psi : F(Y) \rightarrow F(X)$ be a homomorphism such that $\psi(y_i) = t_i, i = 1, \dots, m$.

Then ψ is an isomorphism and $|\psi(v)| = \sum_{i=1}^m |t_i| \deg_{y_i}(v)$ for all $v \in F(Y)$.

Следствие 5. Let $F(X)$ be a free GS -quasigroup with free set of generators $X, |X|$ is finite. Then X is the unique reduced set of generators.

Определение 4. Let $F(X)$ be a free GS -quasigroup with free set of generators $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Then an automorphism $\phi = \phi_i(R), R \in G_i$, such that $\phi(x_j) = x_j, j \neq i, \phi(x_i) = x_i R$, is called **elementary** automorphism. Every permutation of X is called elementary automorphism too.

The subgroup $T(X)$ of $Aut(F(X))$ generated by all elementary automorphisms is called the group of **tame** automorphisms.

Теорема 1. Let $F(X)$ be a free GS -quasigroup with free set of generators $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Then every finite generated subquasigroup of $F(X)$ is free and every automorphism of $F(X)$ is tame.

Let G be a GS -quasigroup and $Mult(G)$ be a group of multiplication, generated by operators $R_x : y \rightarrow y.x$ and $L_x : y \rightarrow x.y$. If $S \subseteq G$ then by $Mult_S(G)$ we denote a subgroup of $Mult(G)$, generated by set $\{R_x, L_x \mid x \in S\}$.

Предложение 4. . Let F be an infinite free GS -quasigroup, then

$$Mult(F) = \Pi_{x \in F} \star \langle R_x \mid R_x^3 = E \rangle,$$

free product of cyclic groups of order three.

Литература

1. Colbourn Ch. J., Rosa A. Triple systems. —/ The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999.
2. Ganter B., Pfuller U. A remark on commutative di-associative loops' // Algebra Universalis. 1985. V. 21. P. 310–311.
3. Grishkov A., Rasskazova D., Rasskazova M., Stuhl I. Free Steiner triple systems and their automorphism groups // Journal of Algebra and its Applications. 2015. V. 14.
4. Grishkov A., Rasskazova D., Rasskazova M., Stuhl I. Nilpotent Steiner loops of class 2 // Communications in Algebra. 2021. V. 46.
5. Mathon R.A., Phelps K.T., Rosa A. Small Steiner triple systems and their properties // Ars. Combinatoria. 1983. 1983. V. 15. P. 3–110.

6. Nagy G.P., Vojtechovsky P. LOOPS: Computing with quasigroups and loops in GAP // URL: <https://cs.du.edu/~petr/loops>.
7. Pflugfelder H.O. Quasigroups and Loops: Introduction. – Heldermann-Verlag, Berlin, 1990.
8. Strambach K., Stuhl I. Translation groups of Steiner loops // Discrete Mathematics. 2009. V. 309. P. 4225–4227.
9. Strambach K., Stuhl I. Oriented Steiner loops // Beitrage zur Algebra und Geometrie. 2013. V. 54. P. 131–145.
10. Stuhl I. Oriented Steiner quasigroups // Journal of Algebra and its Applications. 2014. V. 13.
11. Markovski S., Sokolova A. Free Steiner loops // Glasnik Matematik. 2001. V. 36. P. 85–93.
12. Mendelsohn E. On the Groups of Automorphisms of Steiner Triple and Quadruple Systems // Journal of Combinatorial Theory. 1978. V. 25. P. 97–104.
13. Nagy P.T., Strambach K. Loops in Group Theory and Lie Theory. – Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2002.
14. Smith J.D. An introduction to Quasigroups and Their Representations. – Chapman Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.
15. Lindner C.C., Rosa A. Topics on Steiner Systems. – North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Netherlands, 1980.
16. Rasskazova D. Finite geometries and related loops and quasigroups. Ph.D. dissertation, Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, Brasil, Dec. 2018.

Дата поступления в оргкомитет: 08.09.2025

ЦЕНТРОИД МЕТАБЕЛЕВЫХ ГРУПП БАУМСЛАГА-СОЛИТЕРА

А.В. Трейер

к. ф.-м. н., e-mail: alexander.treyer@gmail.com, SPIN-код: 4044-1417

И.А. Чесноков

аспирант, e-mail: ivanches1920@gmail.com

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия

Аннотация. В 2005 году А. Г. Мясников и С. Лютиков в работе [3] ввели понятие центроида произвольной группы G как кольцо всех нормальных квази-эндоморфизмов этой группы. В той же статье было доказано, что центроид CSA групп имеет явное описание. Мы показали, что можно обобщить этот результат на более широкий класс СТ-групп и более того установить критерий с помощью структуры центроида. С помощью этого результата были вычислены центроиды некоторых сплетений абелевых групп, метабелевых групп Баумслага-Солитера и свободных конечно порожденных метабелевых групп.

Ключевые слова: Центроид, степенные группы, метабелевы группы Баумслага-Солитера, централизаторы, кольцо эндоморфизмов.

1. Центроид группы

С помощью полученных результатов о центроидах нильпотентных групп С. Лютиков и А. Мясников доказали жесткость конечнопорожденных неабелевых свободных нильпотентных групп. Для произвольной абелевой группы A центроид этой группы совпадает с кольцом эндоморфизмов группы A и, таким образом, понятие центроида можно воспринимать как аналог понятия кольца эндоморфизмов для неабелевых групп. Изучение центроидов важно для теории степенных групп (MR -групп) [1], так как центроид группы является максимальным кольцом скаляров этой группы, то есть любое другое кольцо, для которого мы можем определить точное действие, удовлетворяющее аксиомам возведения в степень на группе, вкладывается в центроид.

Центроид произвольной группы выделяется в множестве всех отображений из группы в себя.

Определение 1. Пусть G — группа. Множество всех отображений из группы G в себя, которые удовлетворяют следующим свойствам: $\forall g, h \in G \forall \varphi \in \Gamma(G)$

1. $h^{-1}g^\varphi h = (h^{-1}gh)^\varphi,$

2. $[g, h] = e \implies (gh)^\varphi = g^\varphi h^\varphi,$

является кольцом относительно операций сложения и композиции отображений и называется центроидом группы G .

На самом деле при изучении центроида группы можно рассмотреть представителей классов сопряженности централизаторов нетривиальных элементов группы и вычислить подкольца определенного вида в центроидах этих централизаторов.

Определение 2. Пусть G — группа, $C < G$ — некоторая её подгруппа. Тогда элементы центроида группы C , которые являются нормальными относительно элементов нормализатора $N_G(C) := \{g \in G \mid g^{-1}Cg = C\}$ обозначим как $\Gamma_N(C)$. Более точно

$$\Gamma_N(C) := \{\varphi \in \Gamma(C) \mid (g^{-1}xg)^\varphi = g^{-1}(x^\varphi)g \quad \forall x \in C, g \in N_G(C)\}.$$

Для СТ-групп, то есть для таких групп, в которых все централизаторы абелевы, подкольца $\Gamma_N(C)$ выделяются в кольце эндоморфизмов подгруппы, так как $\Gamma(C) = \text{End}(C)$. В этом случае можно разложить центроид группы в прямое произведение подколец и это было показано в статье [4].

Теорема 1. Пусть G — группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. G — СТ-группа
2. $\Gamma(G) \cong \overline{\prod_{i \in I} \Gamma_N(C_i)}$,
3. $\Gamma(G) \cong \overline{\prod_{i \in I} \text{End}_N(C_i)}$,

где $\text{End}_N(C_i)$ — кольцо эндоморфизмов C_i , нормальных относительно всех элементов группы G , C_i — представители классов сопряженности централизаторов нетривиальных элементов группы G .

2. Метабелевы группы Баумслага-Солитера

В классе СТ лежат множество классов интересных групп, такие как группы фон-наршика L_n , свободные разрешимые группы и некоторые алгебраические группы. Оказалось, что группы $BS(1, k)$ также принадлежат этому классу.

Определение 3. Группой Баумслага-Солитера типа $BS(1, k)$ называется группа G с двумя порождающими и одним соотношением:

$$G \cong BS(1, k) = \langle a, b \mid a^{-1}ba = b^k \rangle.$$

Лемма 1. Пусть $k \in \mathbb{Z}$, $G \cong BS(1, k)$. Тогда

1. Централизатором нетривиального элемента $g \in G$ является либо $\langle g_0 \rangle$ — бесконечная циклическая группа, порожденная максимальным корнем элемента g , либо коммутант, изоморфный $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}] \cong [G, G]$;

2. G является СТ-группой;
3. Количество классов сопряженности централизаторов нетривиальных элементов в группе G счётно.

Коммутант $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ группы типа $BS(1, k)$ является $\mathbb{Z}$ -модулем с базисом $e_i, i \in \mathbb{Z}$ и соотношениями $ke_i = e_{i+1}$ и изоморфна аддитивной группе многочленов Лорана $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}] \cong \langle \{\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i e_i\} \mid + \rangle$. Из представления группы G можно заметить, что она раскладывается в полупрямое произведение групп $H = \langle b \rangle$ и $K = \langle a \rangle$, так как $H \triangleleft G$, $HK = G$ и $H \cap K = \{e\}$, причём гомоморфизм $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ задан следующим образом $\varphi_{a^{-1}}(b) = a^{-1}ba = b^k$.

Определим на $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ операцию умножения $\circ$:

$$g \circ h = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i e_i \circ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_j e_j = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_i \beta_j e_{i+j}.$$

Операция $\circ$ на $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ по сути есть умножение многочленов Лорана и поэтому является ассоциативной и дистрибутивной со сложением в модуле $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$. Построенное кольцо обозначим через $\mathcal{Z}_k$.

Теорема 2. Пусть $G \cong BS(1, k)$. Тогда

$$\Gamma(G) \cong \prod_{i \in J} \overline{\mathbb{Z}} \times \mathcal{Z}_k,$$

где J — счетное множество представителей классов сопряженности централизаторов максимальных корней нетривиальных элементов $g \in BS(1, k) \setminus \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$.

Литература

1. Мясников А. Г., Ремесленников В. Н., Степенные группы I: Основы теории и тензорное пополнение // Сиб. мат. ж. 1994. Т. 35, N. 5, С. 1106–1118.
2. Group Theory: essays for Philip Hall / P. Hall [and oth.]. London, Orlando : Academic Press, 1984, 353 p
3. S.Lioutikov and A.Myasnikov. Centroids of groups // Journal of Group Theory, 2000. V. 3, N. 2. P. 177-197.
4. Трейер А. В., Чесноков И. А. Центроиды СТ-групп // Алгебра и логика, (принята к публикации)

Дата поступления в оргкомитет: 09.09.2025